

# Pracownia Fizyczna

Podstawowe własności fizyczne cienkich warstw

Część druga: Zależność oporu właściwego cienkich warstw metalicznych od grubości  
- efekt rozmiarowy

Poznań 2003

*wersja 1b*

*opracowanie: M. Urbaniak*

*Instytut Fizyki Molekularnej*

*Polskiej Akademii Nauk*

*Poznań*

# Przewodnictwo elektryczne

Przewodnictwo elektryczne zdefiniowane jest jako przenoszenie ładunków elektrycznych w *substancji* pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego

Zjawiska <sup>1</sup> elektryczne znane były już w starożytności. Już wtedy obserwowano przyciąganie przez potarty bursztyn (po grecku *elektron*) małych, lekkich przedmiotów. Pierwsze badania zjawisk elektrycznych miały jednak miejsce dopiero w końcu XVI wieku (William Gilbert, lekarz i fizyk angielski) [1]. Badania **prądu elektrycznego**, czyli *uporządkowanego ruchu ładunków elektrycznych* [2], zapoczątkowane zostały w połowie wieku XVII (Otton von Guericke, fizyk niemiecki).

W zależności od rodzaju ładunków tworzących prąd przewodnictwo dzieli się na:

- elektronowe
- jonowe → pod wpływem pola elektrycznego poruszają się aniony lub kationy <sup>2</sup>

**W obecnym ćwiczeniu interesuje nas tylko pierwszy typ przewodnictwa.**

<sup>1</sup>Tekst dostępny również pod adresem: [www.ifmpan.poznan.pl/~urbaniak/cwiczenie1b.ps](http://www.ifmpan.poznan.pl/~urbaniak/cwiczenie1b.ps)

<sup>2</sup>W niektórych substancjach (np. stan plazmy) obserwuje się przewodnictwo mieszane.

# Wielkości charakteryzujące przewodnictwo elektryczne

- **przewodność elektryczna ( $G$ )/opór elektryczny( $R$ )<sup>3</sup>** → określają własność układu przewodzącego prąd elektryczny. Zależą od geometrii układu (długość przewodnika, jego przekrój poprzeczny, rozmieszczenie elektrod itp.).
- **przewodność elektryczna właściwa( $\sigma$ ) /opór elektryczny właściwy( $\rho$ )** → określają własności materiału, z którego wykonany jest układ przewodzący. Zależą od rodzaju substancji (np. metal, izolator), ich mikroskopowej struktury (liczba defektów, rodzaje domieszek itp.) oraz warunków fizycznych (temperatura, częstość wzbudzeń, pole magnetyczne, naprężenia itp.).
- **nateżenie prądu elektrycznego( $I$ )** → zależy od oporu elektrycznego i natężenia pola elektrycznego ( $E$ ). W wielu materiałach nateżenie prądu elektrycznego, w typowych warunkach, jest z dobrym przybliżeniem proporcjonalne do  $E$ . Materiały takie nazywane są przewodnikami omowymi. Do przewodników takich należą metale, właściwości których są tematem niniejszego ćwiczenia.
- **napięcie elektryczne** - różnica potencjałów elektrycznych dwóch punktów.

---

<sup>3</sup>Określenia przewodnictwo i przewodność oraz opór i oporność używane są zamiennie [2]

# Makroskopowy opis przewodnictwa

Systematyczne badania wiążące *nateżenie prądu elektrycznego*, czyli stosunku ładunku elektrycznego, który przepływa przez poprzeczny przekrój przewodnika, do czasu  $t$  przepływu tego ładunku, z napięciami na powierzchni przewodnika po raz pierwszy wykonane zostały przez niemieckiego fizyka Georga Simona Ohma. Prawo jego imienia, w najbardziej znanej formie  $\mathbf{R} = \mathbf{U}/\mathbf{I}$ , sformułowane zostało przez niemieckiego fizyka Gustawa Kirchoffa w 1849 roku.

**Prawo Ohma**, czyli twierdzenie o **proporcjonalności lokalnej gęstości prądu do lokalnego nateżenia pola elektrycznego**<sup>4</sup>, stanowi podstawę elementarnej teorii przewodnictwa. Do analizy przewodnictwa makroskopowych przewodników szczególnie przydatne jest prawo Ohma w postaci **lokalnej**:

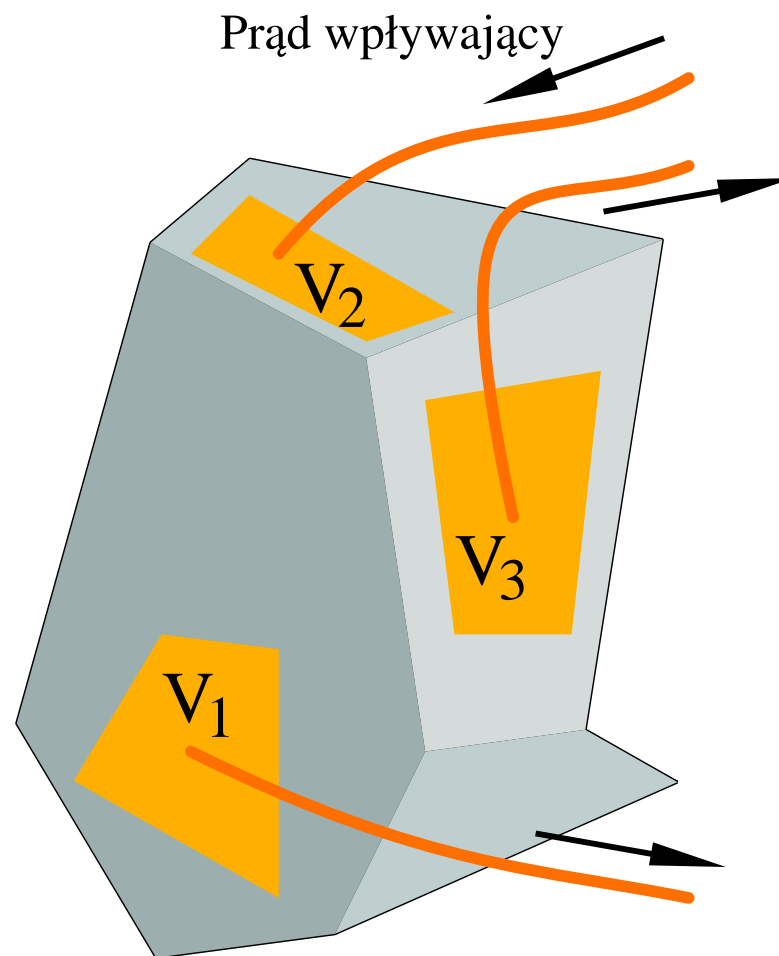
$$j = \sigma E, \tag{1}$$

gdzie  $\sigma$  oznacza przewodnictwo elektryczne właściwe,  $j$  lokalną gęstość prądu (nateżenie prądu przypadające na jednostkę powierzchni prostopadłą do lokalnego kierunku przepływu prądu) i  $E$  lokalne nateżenie pola elektrycznego.

---

<sup>4</sup>Prawo Ohma może być sformułowane na kilka sposobów, np.: nateżenie prądu płynącego przez przewodnik jest wprost proporcjonalne do napięcia  $U$  panującego na jego końcach [2]

W typowych przypadkach *elektrody* ustalają potencjał na powierzchni przewodnika dowolnego kształtu (np.  $V_1$ ,  $V_2$  i  $V_3$  w poszczególnych obszarach). Liczba elektrod może być nieograniczona <sup>a</sup>. Przewodnictwo właściwe takich elektrod powinno być nieskończenie duże (w całej elektrodzie panuje jednakowy potencjał). W praktyce wystarczy by elektroda wykonana była z materiału o dużej przewodności w porównaniu z przewodnością badanego materiału (np. miedziana elektroda na powierzchni ołowiu).

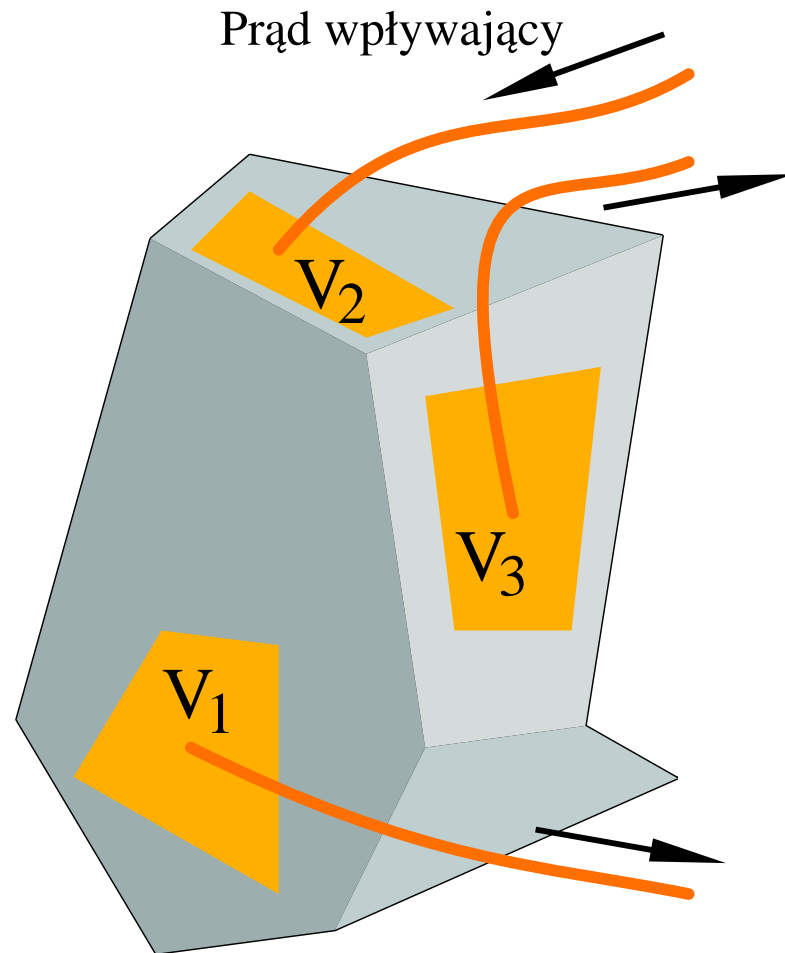


<sup>a</sup>Typowym przykładem układu z trzema elektrodami może być tranzystor.

Analiza układu polega na wyznaczeniu wartości prądów wpływających i wypływających w zależności od wartości potencjałów elektrod (na rysunku  $V_1$ ,  $V_2$  i  $V_3$ ) oraz właściwości otoczenia przewodnika.

W układach z większą od dwóch liczbą elektrod nie można mówić o oporze układu w sensie prawa Ohma (nie ma jednego oporu układu)\*.

**W dalszej części interesować będą nas tylko układy „dwuelektrodowe”.**



\*Zainteresowani analizą układów przewodzących mogą sięgnąć do opracowania:

[www.mit.edu/afs/athena/course/6/6.013\\_book/OldFiles/www/navigate7.html](http://www.mit.edu/afs/athena/course/6/6.013_book/OldFiles/www/navigate7.html)



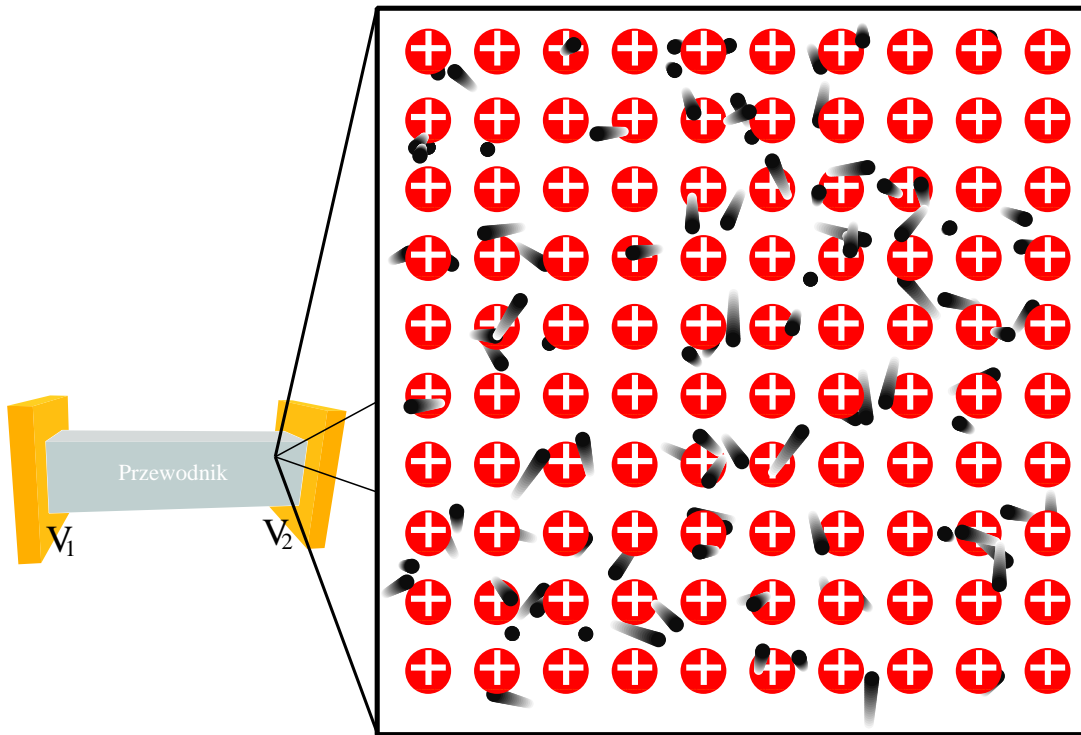
$$U = V_2 - V_1$$

Gdy w układzie są tylko dwie elektrody układ scharakteryzować można jednym związkiem łączącym natężenie płynącego przez przewodnik prądu z napięciem  $U$  panującym na jego końcach:

$$I = GU, \tag{2}$$

gdzie  $G$  oznacza przewodnictwo (jednostką jest **siemens** (S),  $1S \equiv 1A/1V = \Omega^{-1}$ ).





W przewodnikach omowych może istnieć gęstość prądu elektrycznego w miejscach gdzie wypadkowa gęstość ładunku jest zerowa.

Z makroskopowego punktu widzenia w przewodniku o jednorodnym przewodnictwie lokalna *gęstość ładunku* ( $\rho$ ) jest zerowa. W skali znacznie większej niż odległości międzyatomowe dodatnie ładunki nieruchomych jonów<sup>5</sup> i znajdujących się w tym samym obszarze elektronów przewodnictwa kompensują się.

<sup>5</sup>W rzeczywistości jony drgają wokół swych położeń równowagi.

# Przewodnictwo jednorodnego przewodnika w stanie stacjonarnym

- Zakłada się, że układ jest w stanie stacjonarnym. Oznacza to, że gęstość prądu elektrycznego oraz gęstość ładunku w każdym punkcie przewodnika jest stała w czasie. Gęstość prądu elektrycznego jest zatem bezźródłowa:

$$\nabla \cdot j = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \sigma E = 0, \quad (3)$$

gdzie symbol  $\nabla F$  oznacza gradient,  $\nabla \cdot F$  dywergencję a  $\nabla \times F$  rotację funkcji  $F$ .<sup>6</sup>

- Zakłada się, że rotacja natężenia pola elektrycznego jest równa zero (jest to tak zwane przybliżenie quasielektrostatyczne odpowiadające przyjęciu  $\partial B / \partial t = 0$ ):

$$\nabla \times E = 0 \iff E = -\nabla \Phi, \quad (4)$$

gdzie  $\Phi$  to potencjał pola elektrycznego.

- Z równań (3) i (4) otrzymuje się:

$$\nabla \cdot \sigma \nabla \Phi = 0. \quad (5)$$

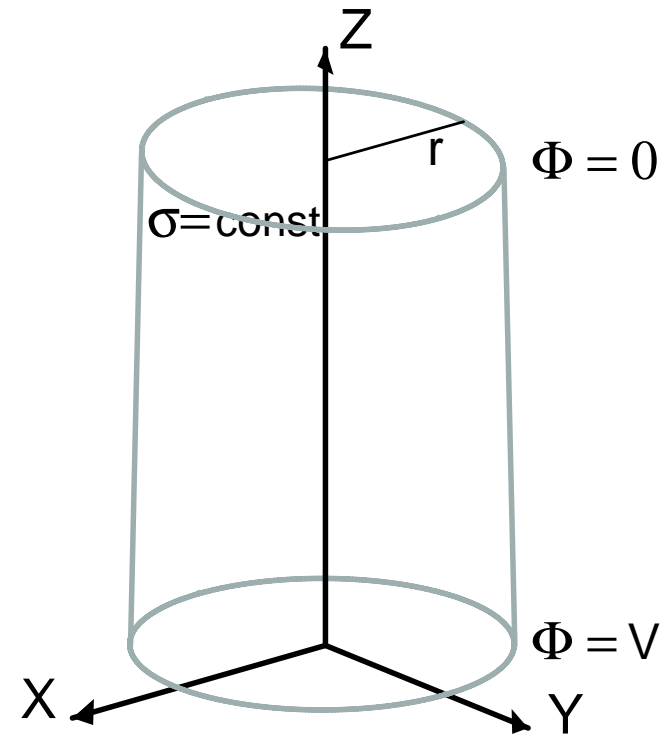
- Gdy przewodnictwo właściwe jest stałe w całej objętości przewodnika ( $\sigma = \text{const}$ ) równanie przyjmuje postać<sup>7</sup>:

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (6)$$

---

<sup>6</sup> $\nabla \equiv x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$ .

<sup>7</sup>Jest to równanie Laplace'a.



Przypadek przewodnika cylindrycznego o przewodności właściwej  $\sigma$  otoczonego idealnym izolatorem<sup>a</sup>:

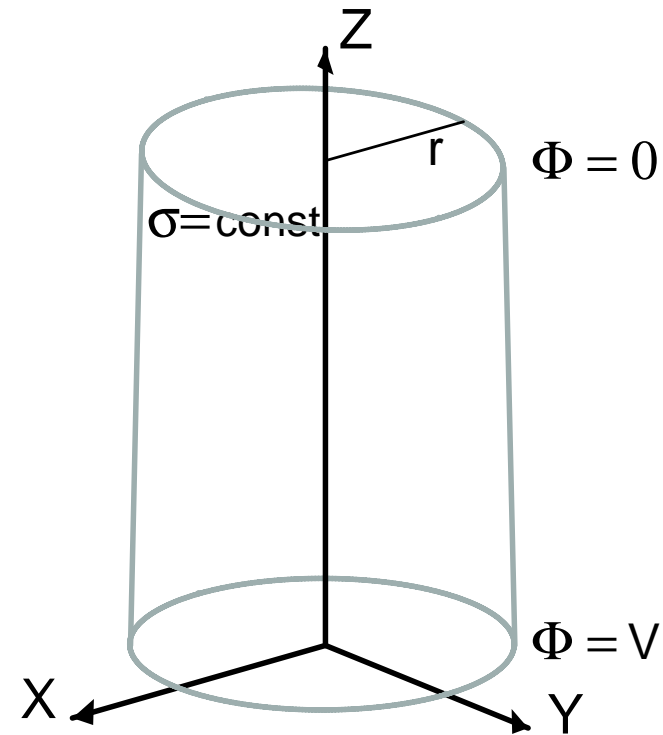
- Zakłada się, że rozwiązanie zależy tylko od  $\mathbf{z}$ .
- Na powierzchni ograniczonej izolatorem normalna składowa natężenia pola elektrycznego wewnątrz przewodnika jest zerowa  $\rightarrow$  prąd nie przepływa przez granicę przewodnik/izolator.
- Rozwiązaniem r. Laplace'a wewnątrz przewodnika, spełniającym warunki brzegowe (potencjał elektrod i pochodna potencjału w przewodniku na jego granicy), jest potencjał postaci:

$$\Phi = V\left(1 - \frac{z}{d}\right). \quad (7)$$

- Z lokalnej postaci prawa Ohma ( $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla \Phi$ ):

$$\mathbf{j} = -\sigma \nabla \Phi = -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \sigma \frac{V}{d}. \quad (8)$$

<sup>a</sup>Poza obszarem elektrod dla  $z=0$  i  $z=d$ ;  $\mathbf{d}$ -długość cylindra.



- Znając lokalną gęstość prądu  $j$  (w rozpatrywanym układzie jednakową w całej objętości przewodnika) można wyznaczyć całkowity prąd przepływający przez przewodnik:

$$J = jS = j\pi r^2, \quad (9)$$

gdzie  $S$  to powierzchnia przekroju przewodnika w kierunku  $z$ .

- Uwzględniając wyrażenie na  $j$  otrzymuje się:

$$J = \left(\frac{\sigma S}{d}\right)V. \quad (10)$$

Przewodność cylindrycznego przewodnika wyraża się zatem wzorem:

$$G = \frac{\sigma S}{d}.$$

# Opór a przewodnictwo

- Wzory określające przewodnictwo ( $G$ ) i przewodnictwo właściwe ( $\sigma$ ) używane są często zamiennie z wzorami określającymi opór ( $R$ ) i oporność właściwą ( $\rho$ )<sup>8</sup>.
- Przewodnictwo elektryczne właściwe definiuje się jako odwrotność oporu elektrycznego właściwego:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}. \quad (11)$$

Jednostką  $\sigma$  jest *siemens na metr* ( $\frac{S}{m}$ ), jednostką  $\rho$  jest *om razy metr* ( $\Omega m$ ).

- Przewodnictwo elektryczne definiuje się jako odwrotność oporu elektrycznego:

$$G = \frac{1}{R}. \quad (12)$$

- Wzór na opór cylindra<sup>9</sup>(i innych przewodników jednorodnych o stałym przekroju poprzecznym) może być zatem zapisany w postaci:

$$R = \frac{\rho d}{S}. \quad (13)$$

---

<sup>8</sup>To czy w danym przypadku do opisu przewodnictwa używa się języka przewodnictwa czy oporności jest zasadniczo kwestią zwyczajową.

<sup>9</sup>Dla geometrii przedstawionej na rysunku tzn. dwie idealne, równoległe elektrody na końcach przewodnika.

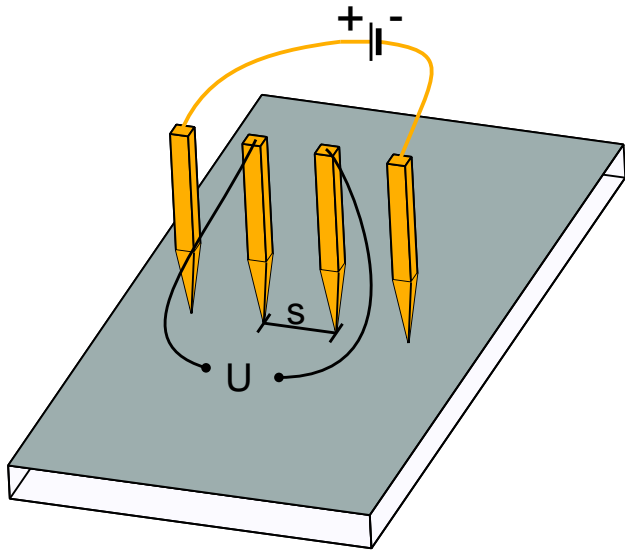
## Sonda cztero-punktowa

- Pomiar oporu służy w wielu przypadkach do wyznaczenia oporności właściwej badanych materiałów<sup>10</sup>.
- Konfiguracja elektrod omówiona uprzednio nie nadaje się do badania cienkich warstw metalicznych ze względu na ich grubość (rzędu  $10^1 - 10^2$  nm;  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ ) → precyzyjne umieszczenie elektrod prostopadle do bocznych powierzchni warstwy jest praktycznie niewykonalne.
- W przypadku próbek o wysokim przewodnictwie dodatkowym problemem staje się opór przewodów łączących elektrody z omomierzem.
- Standardową metodą pomiaru oporu, stosowaną powszechnie w przemyśle półprzewodników, jest metoda czteropunktowa<sup>11</sup>.
- W metodzie tej wykorzystuje się tzw. *sondę czteropunktową*.

---

<sup>10</sup>Tak jest również w niniejszym ćwiczeniu.

<sup>11</sup>Metoda ta stosowana jest w niniejszym ćwiczeniu.



- *Liniowa* sonda czteropunktowa składa się z czterech, ustawionych liniowo, elektrod będących w kontakcie elektrycznym z powierzchnią badanej warstwy. Odległość między sąsiednimi elektrodami wynosi  $s$  ( $s \approx 3\text{mm}$ ).
- Dwie zewnętrzne elektrody (*elektrody prądowe*) łączą próbkę ze stabilizowanym źródłem prądu.
- Dwie elektrody wewnętrzne (*elektrody napięciowe*) połączone są z woltomierzem. Wysoki opór wewnętrzny woltomierza (rzędu kilku  $\text{M}\Omega$ ) powoduje, że elektrody te praktycznie nie wpływają na przepływ prądu w warstwie (prąd przepływający przez woltomierz jest b. mały).

Dla sondy czteropunktowej związek między prądem przepływającym przez elektrody prądowe ( $I$ ) i napięciem panującym między elektrodami napięciowymi<sup>12</sup> ( $U$ ) wyraża się wzorem<sup>13</sup> [4]:

$$\rho = \left(\frac{\pi}{\ln 2}\right) \left(\frac{Ud}{I}\right) \approx 4.532 \left(\frac{Ud}{I}\right), \quad (14)$$

gdzie  $d$  oznacz grubość warstwy w miejscu pomiaru. **Posługiwanie się powyższym wzorem wymaga znajomości grubości warstwy.**

<sup>12</sup>Gdy prąd przepływający przez woltomierz jest mały wtedy spadek napięcia na przewodach doprowadzających jest na tyle mały, że wskazania woltomierza odpowiadają z dużą dokładnością rzeczywistej wartości  $U$ . Praktycznie oznacz to, że długość przewodów łączących woltomierz z elektrodami napięciowymi może być duża (przewody wykonane są z dobrych przewodników).

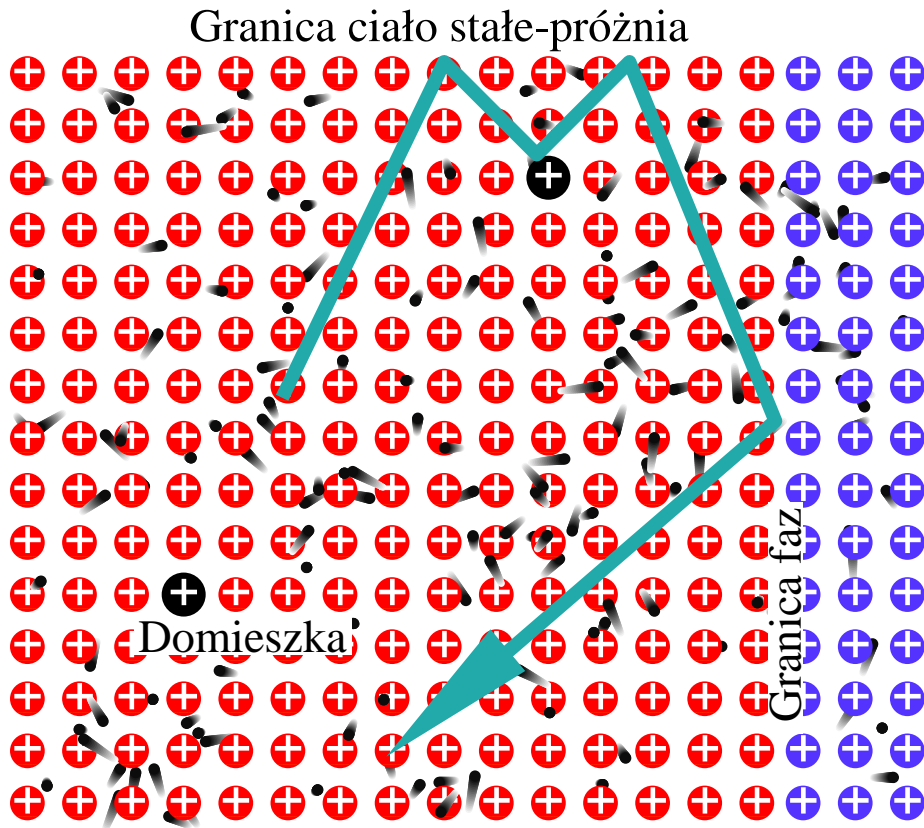
<sup>13</sup>Równanie to wyprowadzone zostało dla przypadku nieskończenie rozciągłej warstwy przewodzącej. W przypadku warstw o innych kształtach (np. prostokąt) wprowadza się korygujący mnożnik [4]. Zastosowanie w ćwiczeniu równania bez mnożnika prowadzić może do pewnego zawyżenia wartości  $\lambda$ .

# Mikroskopowy opis przewodnictwa

- Celem mikroskopowej teorii przewodnictwa jest przewidywanie zachowania się różnorodnych układów przewodzących w zależności od ich struktury i składu (pierwiastki, stopy i związki).
- Jednym z największych sukcesów współczesnej teorii jest wyjaśnienie przyczyn, dla których jedne pierwiastki czy związki są dobrymi *przewodnikami* ( $\sigma > 10^5 \Omega^{-1} m^{-1}$  lub  $S/m$ ) inne z kolei *izolatorami* ( $\sigma < 10^{-8} \Omega^{-1} m^{-1}$ )  $\implies$  pasmowa teoria ciała stałego.
- Pasmowa teoria ciała stałego wraz z jej współczesnymi udoskonaleniami potrafi stosunkowo precyzyjnie przewidywać własności fizyczne przewodników. Teoria ta jest jednak nad wyraz skomplikowana.
- Okazuje się jednak, że jakościowy opis przewodnictwa cienkich warstw metalicznych, to jest takich badanie których jest przedmiotem niniejszego ćwiczenia, możliwy jest przy użyciu fenomenologicznego **równania transportu Boltzmana**.
- Historycznie pierwszym stosunkowo owocnym teoretycznym opisem przewodnictwa był model niemieckiego fizyka *Paula Drudego* (1863-1906). Model ten zapoczątkował opis przewodnictwa elektrycznego, przewodnictwa cieplnego i własności optycznych ciał stałych jako wynikających z oddziaływania ładunków elektrycznych obecnych w ciałach ze środowiskiem zewnętrznym. W późniejszym okresie teoria ta została rozbudowana w przez *Arnolda Sommerfelda* i *Hendrika Lorentza*. W obecnej postaci stanowić może ona punkt wyjścia do opisu przewodnictwa warstw metalicznych.



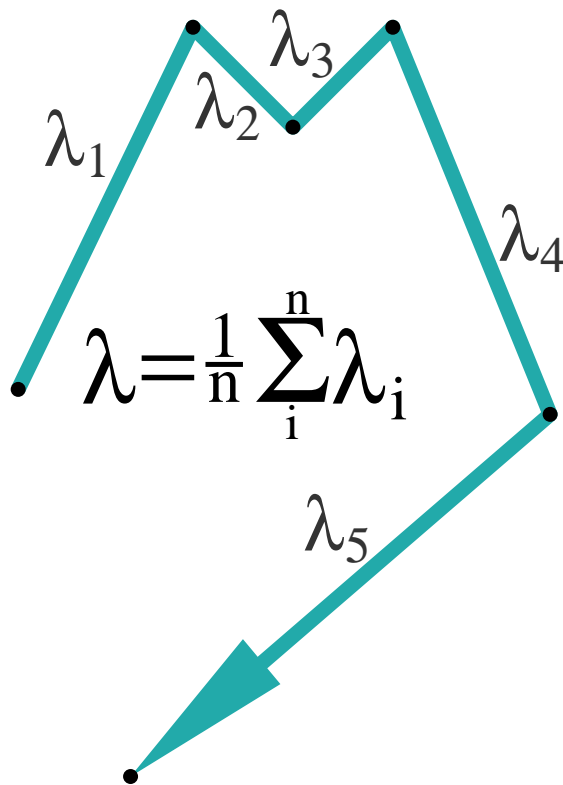
# Rozpraszanie elektronów



- Uwolnione z atomów elektrony przewodnictwa poruszają się w ciele stałym z prędkościami rzędu prędkości Fermiego ( $v \approx 0.1 c$ ) [5].
- W rzeczywistych ciałach stałych elektrony ulegają *rozproszeniom*, czyli *zmianie kierunku lub prędkości ruchu* (precyzyjniej mówiąc zmianie ulega stan kwantowy elektronu), na wszelkich odstępstwach od idealnej periodyczności.
- Rozpraszanie następować może między innymi na obcych **domieszkach** (patrz rysunek), **granicach faz** (powierzchnia graniczna między obszarami o różnej strukturze, składzie, namagnesowaniu itp.), na **granicy ciało stałe-próżnia**, na **defektach** sieci krystalicznej oraz drganiach sieci (fonony).

W wyniku rozpraszania ruch elektronów w rzeczywistych układach fizycznych jest zawsze chaotyczny.

## Średnia droga swobodna elektronów



- Do opisu zachowania elektronów przewodnictwa wygodnie jest wprowadzić, poprzez analogię z pojęciem średniej drogi swobodnej cząsteczek gazu (*Rudolf Clausius*, 1858), pojęcie **średniej drogi swobodnej elektronów przewodnictwa**  $\lambda$  zdefiniowanej jako średnia droga przebywana przez elektron między kolejnymi rozproszeniami/zderzeniami.
- W przybliżeniu, pomijając dryft elektronów pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego, można zapisać

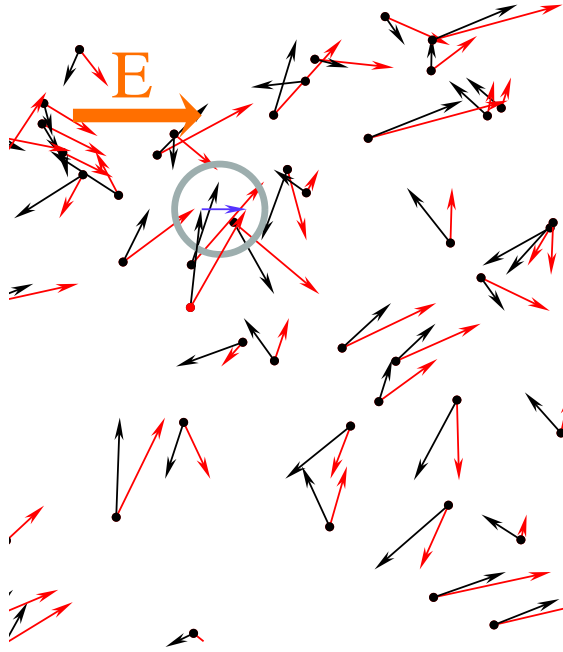
$$\lambda = v_F \tau, \quad (15)$$

gdzie  $v_F$  to prędkość Fermiego czyli prędkość elektronów uczestniczących w przewodnictwie, a  $\tau$  to czas między kolejnymi rozproszeniami (w typowych warunkach  $\tau$  jest rzędu  $10^{-14}$  s).

- W objętościowych próbkach metali  $\lambda$  mieści się w granicach od kilku do kilkudziesięciu nanometrów. **W temperaturze pokojowej  $\lambda$  wynosi około 40 nm dla Cu i Au oraz 60 nm dla Ag. W czystej miedzi, w temperaturze 4°K  $\lambda$  może sięgać 0.3 cm [6].**

# Dryft elektronów pod wpływem pola elektrycznego

## Model Drudego



Dryft elektronów przewodnictwa wywołany zewnętrznym polem elektrycznym. Strzałki czarne - chwilowe prędkości elektronów dla  $E=0$ . Niebieska strzałka - prędkość dryftu. Czerwone strzałki - wypadkowa prędkość elektronów.

- Elektrony przewodnictwa tworzą tzw. *gaz elektronowy*. W nieobecności zewnętrznych pól ruch elektronów przewodnictwa w metalu jest całkowicie chaotyczny. Średnia prędkość elektronów przewodnictwa w każdym, dostatecznie dużym obszarze ciała stałego, jest równa zero.
- Drude założył, że przyłożenie zewnętrznego pola elektrycznego powoduje, że elektrony uzyskują dodatkową prędkość w kierunku przyłożonego pola (ale o przeciwnym zwrocie ze względu na znak ładunku elektronu). Jest to tak zwany **dryft elektronów**.
- W zewnętrznym polu elektrycznym na każdy elektron działa siła  $F$ :

$$F = Ee, \quad (16)$$

która wywołuje przyspieszenie

$$a = \frac{Ee}{m}, \quad (17)$$

gdzie  $e$  jest ładunkiem elektronu a  $m$  jego masą.

## Model Drudego cd.

- Pod wpływem przyspieszenia wzrasta prędkość elektronów jednak w wyniku rozproszeń, średnio po czasie  $\tau$  prędkość elektronu ulega zmianie. W czasie między zderzeniami prędkość elektronu wzrasta o:

$$\Delta v = a\tau = \frac{e\tau E}{m}. \quad (18)$$

- Zakłada się, że w wyniku rozproszeń zanika korelacja między prędkością przed i po rozproszeniu. Średnia prędkość elektronów w kierunku przyłożonego pola może być przybliżona wyrażeniem<sup>14</sup>:

$$v_{dryft} = \frac{e\tau E}{m}. \quad (19)$$

- W normalnych warunkach prędkość dryftu  $v_{dryft}$  ma wartości rzędu **cm/s** !, czyli jest o 6 rzędów wielkości niższa niż prędkość Fermiego ruchów chaotycznych.
- Ilość ładunku przepływająca przez jednostkową powierzchnię w jednostce czasu, czyli gęstość prądu, określona jest wyrażeniem:

$$j = Ne v_{dryft}, \quad (20)$$

gdzie  $N$  oznacza ilość elektronów znajdującą się w jednostce objętości. Ze względu na to, że średnia po objętości (i czasie) ruchów chaotycznych jest równa zero nie dają one przyczynku do średniego prądu.

- Gęstość prądu elektronów przewodnictwa wyraża się zatem wzorem:

$$j = \frac{Ne^2\tau E}{m}. \quad (21)$$

---

<sup>14</sup>Rzeczywista średnia prędkość elektronów jest niższa gdyż w dowolnej chwili czas jaki upłynął od ostatniego rozproszenia jest różny dla poszczególnych elektronów.

## Model Drudego cd.

- Porównując powyższe wyrażenie z mikroskopową postacią prawa Ohma ( $j = \sigma E$ ) otrzymuje się wyrażenie na przewodnictwo właściwe w modelu Drudego:

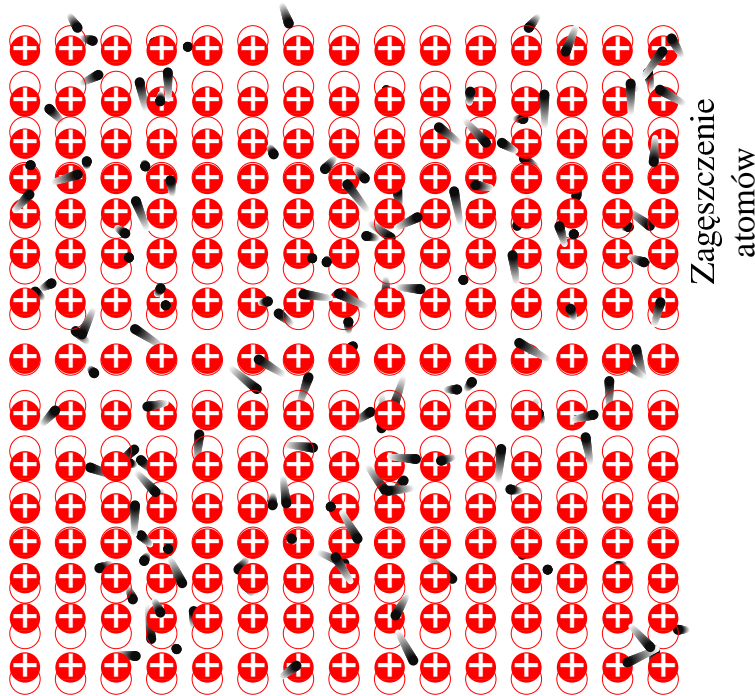
$$\sigma = \frac{Ne^2\tau}{m}. \quad (22)$$

Podstawowym wnioskiem wynikającym z wyrażenia Drudego jest monotoniczna zależność przewodnictwa właściwego od średniego czasu między rozproszeniami  $\tau$ . Uwzględniając definicję średniej drogi swobodnej otrzymuje się:

$$\sigma \propto \lambda. \quad (23)$$

Model Drudego jest tylko opisem fenomenologicznym, nie przewiduje prawidłowo wartości przewodnictwa ani innych własności przewodników. Poprzez wprowadzenie pojęcia gazu elektronowego i średniej drogi swobodnej elektronów przewodnictwa stanowił on jednak podstawę, na której rozwinęła się *kwantowa teoria przewodnictwa*.

# Reguła Matthiessena



Schemat deformacji sieci krystalicznej w wyniku propagacji podłużnej fali akustycznej rozchodzącej się pionowo. Czerwone kółka-położenia atomów w niezaburzonej sieci.

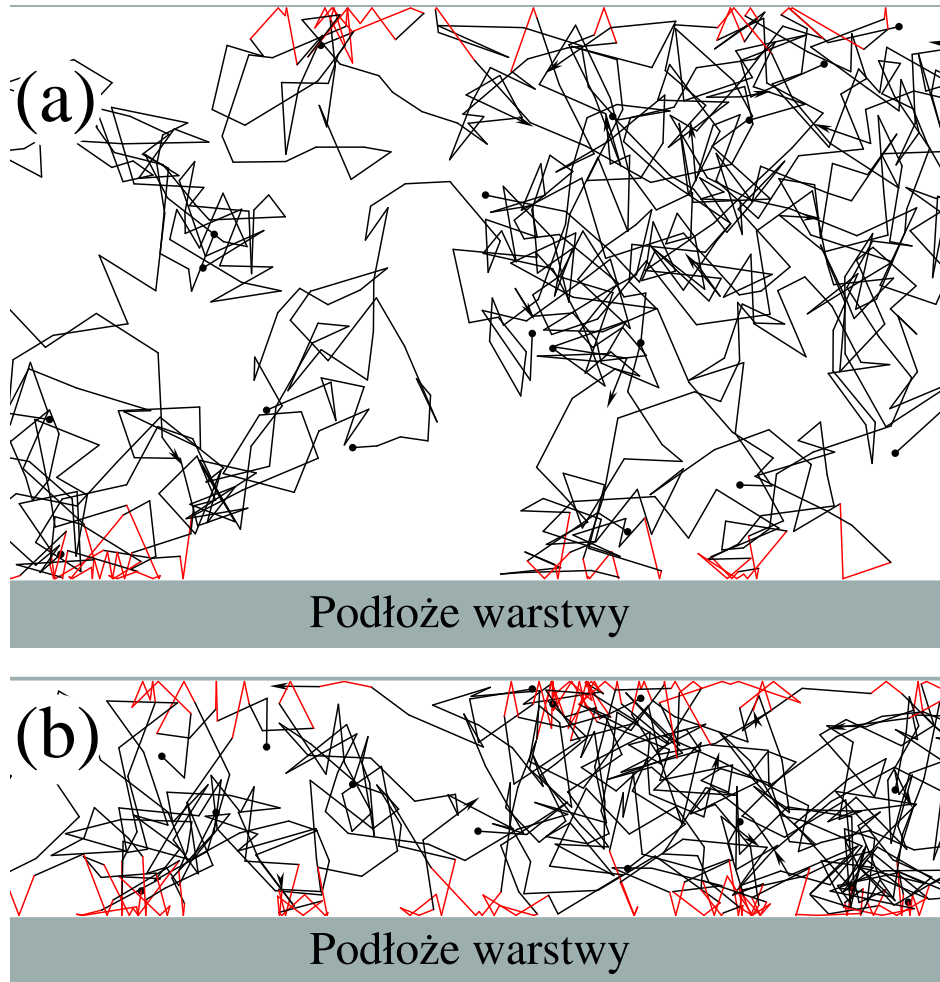
- Rozpraszanie elektronów zachodzić może również na drganiach sieci krystalicznej, tak zwanych **fononach** [5]. Propagacja fali dźwiękowej prowadzi do lokalnego zagęszczenia/rozszerzenia sieci krystalicznej. Stanowi to naruszenie periodyczności i podobnie jak obecność domieszek czy granic między fazami prowadzi do rozpraszania elektronów.
- Obniżanie temperatury prowadzi do zaniku drgań sieci, ale w układach zawierających domieszki i/lub defekty opór pozostaje różny od zera nawet w temperaturze dążącej do zera ( $T \rightarrow 0$ ).
- Opór właściwy metali wyraża się wtedy równaniem:

$$\rho = \rho_{\text{reszkowy}} + \rho(T), \quad (24)$$

gdzie  $\rho(T)$  oznacza opór wywołany przez oddziaływanie elektronów z fononami. Równanie to nazywane jest **regułą Matthiessena**. Nie stosuje się do metali i stopów nadprzewodzących.

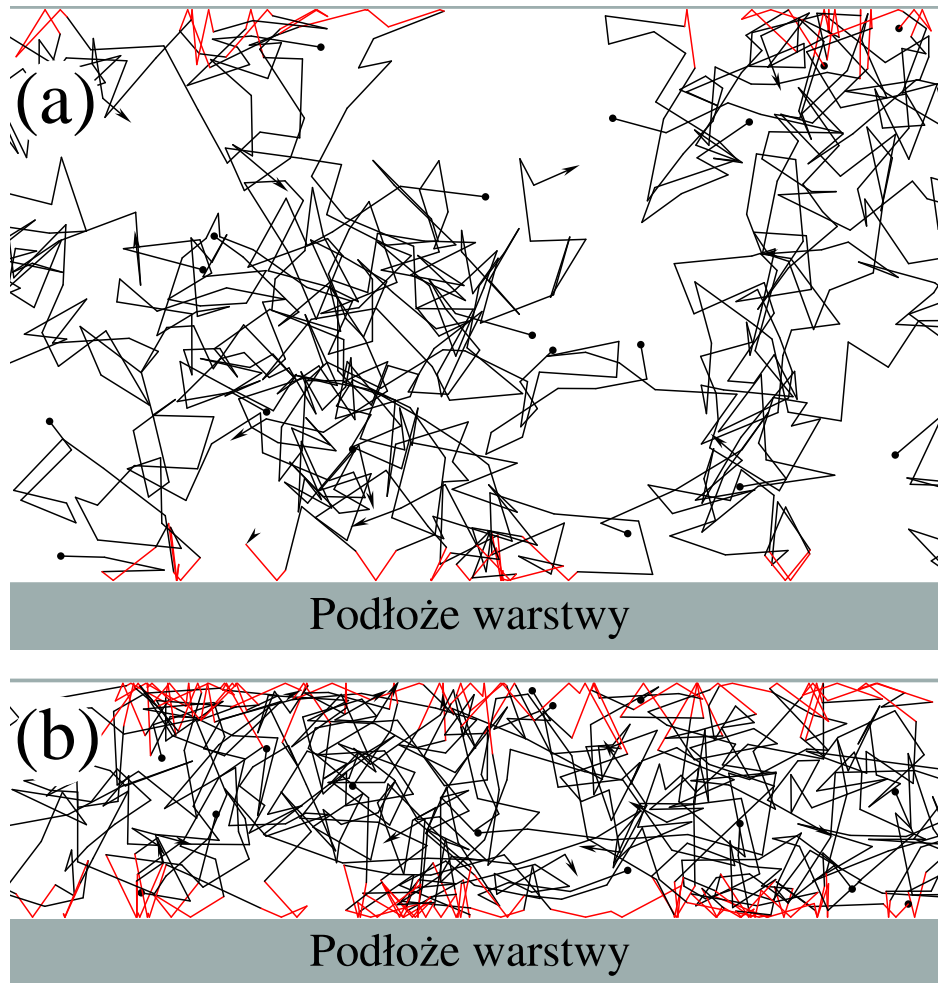
**Reguła Matthiessena jest przybliżeniem**

# Efekt rozmiarowy Thompsona



- W objętościowych (tzn. o wymiarach makroskopowych) przewodnikach tylko niewielka część elektronów przewodnictwa znajduje się w odległości mniejszej niż średnia droga swobodna od granic zewnętrznych przewodnika (w przypadku miedzanego drutu o średnicy milimetra stanowią one zaledwie około 0.02% wszystkich elektronów przewodnictwa,  $\lambda_{Cu} \approx 40$  nm).
- Spośród elektronów znajdujących blisko powierzchni ( $d \leq \lambda$ ) znacznie mniej niż połowa (kierunek prędkości jest przypadkowy) w czasie  $\tau$  dozna rozproszenia na tej powierzchni. **W układach makroskopowych rozpraszanie na zewnętrznych powierzchniach jest zatem zanedbywalnie małe.**

## Efekt rozmiarowy Thompsona cd.



Schemat efektu rozmiarowego. Kolorem czerwonym zaznaczone są rozproszenia na powierzchniach granicznych przewodników w postaci cienkich warstw o różnej grubości.

- W warstwach metalicznych o grubości  $d$  znacznie większej od  $\lambda$  (rys. a) rozpraszanie na powierzchni górnej i granicy warstwa-podłoże jest również zaniedbywalne.
- Gdy jednak grubość warstwy metalicznej staje się porównywalna ze średnią drogą swobodną ( $d \approx \lambda$ , rys. b) wtedy duża część elektronów ulega w jednostce czasu rozproszeniom na powierzchniach granicznych warstwy. Efekt ten nazywany jest **efektem rozmiarowym Thompsona**.
- Zwiększone rozpraszanie prowadzi do zmniejszenia efektywnej średniej drogi swobodnej co w przypadku rozpraszania nieelastycznego prowadzi do **obniżenia przewodnictwa**.
- Teoretyczne badanie efektu rozmiarowego możliwe jest w wielu formalizmach. Poniżej zarysowana zostanie **teoria Fuchsa** bazująca na *równaniu Boltzmanna*.



# Teoria Fuchsa-Sondheimera

Teoria Fuchsa, opisująca efekt rozmiarowy, bazuje na równaniu Boltzmana, jednym z podstawowych równań teorii gazów. W ogólnej postaci równanie to ma następującą postać:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{pola} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{dyfuzja} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rozpraszanie} = \frac{df}{dt}, \quad (25)$$

gdzie  $f(x, y, z, k_x, k_y, k_z, t)dx dy dz dk_x dk_y dk_z dt$  oznacza liczbę cząstek, które w chwili  $t$  znajdują się w elemencie objętości  $dx dy dz$  ulokowanym w punkcie  $(x, y, z)$  i znajdują się w stanach opisanych wektorami falowymi z zakresu  $dk_x dk_y dk_z$  skoncentrowanymi wokół wartości  $(k_x, k_y, k_z)$

oraz gdzie poszczególne wyrazy lewej strony równania oznaczają **wpływ sił pól zewnętrznych (elektrycznych i magnetycznych), wpływ dyfuzji oraz wpływ rozpraszania na funkcję stanu  $f$** .

Posługując się twierdzeniem Liouville'a o zachowaniu objętości w przestrzeni fazowej powyższe równanie można przekształcić do postaci:

$$\left(\frac{df}{dt}\right) + \frac{\partial k}{\partial t} \nabla_k f + v \nabla_r f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rozpraszanie}, \quad (26)$$

gdzie  $\nabla_r \equiv x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$ .

Drugi człon lewej strony równania (26) opisuje wpływ pól zewnętrznych ( $\hbar \dot{k} \equiv F_{Lorentza} = e[E + (v \times B)]$ ), trzeci człon opisujący dyfuzję odzwierciedla fakt, że zmiany w punkcie  $\mathbf{r}$  w chwili  $t+dt$  wywołane są cząsteczkami, które w momencie  $t$  znajdowały się w punkcie  $\mathbf{r} - v dt$ .

W celu rozwiązania r. Boltzmana czyni się często szereg założeń upraszczających.

W teorii transportu elektronowego zakłada się często, że dla niezbyt dużych odchyień funkcji rozkładu  $f_{init}$  od stanu równowagi  $f_0$  powrót do równowagi pod wpływem samych tylko rozproszeń następuje eksponencjalnie w funkcji czasu:

$$(f - f_0) = (f_{init} - f_0)e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (27)$$

Wyraz opisujący rozpraszanie można zatem zapisać jako:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rozpraszanie} = -\frac{(f - f_0)}{\tau} \equiv \frac{g}{\tau}. \quad (28)$$

Jest to tak zwane **przybliżenie czasu relaksacji**, które w metalach zdefektowanych lub zanieczyszczonych stosowane być może w pełnym zakresie temperatur a dla czystych metali powyżej temperatury Debye'a<sup>15</sup>.

Celem teorii Fuchsa było opisanie zachowania warstwy pod wpływem pola elektrycznego w **stanie stacjonarnym** tzn. takim, w którym funkcja rozkładu nie zmienia się w czasie; wtedy ( $\frac{df}{dt} = 0$ ) (nie jest to stan równowagi tzn. bez obecności pól zewnętrznych i gradientu temperatury).

W stanie stacjonarnym i w przybliżeniu czasu relaksacji równanie (26) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial k}{\partial t} \nabla_k f + v \nabla_r f = \frac{g}{\tau}. \quad (29)$$

W wyprowadzeniu przewodności uwzględnić należy tylko pole elektryczne (patrz drugi człon równania (26)), wtedy z

---

<sup>15</sup>Badane w niniejszym ćwiczeniu warstwy mogą być traktowane jako układy zdefektowane.

(29) otrzymujemy:

$$\frac{eE}{\hbar} \nabla_k f + v \nabla_r f = \frac{g}{\tau}. \quad (30)$$

Uwzględniając kwantowomechaniczny związek wektora falowego i pędu ( $p = mv = \hbar k$ ) otrzymujemy  $\frac{\partial f}{\partial k} = \frac{\partial v}{\partial k} \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial f}{\partial v}$ , stąd  $\nabla_k \Rightarrow \frac{\hbar}{m} \nabla_v$ . Równanie (30) można zatem przekształcić do postaci:

$$\frac{eE}{m} \nabla_v f + v \nabla_r f = \frac{g}{\tau}. \quad (31)$$

Badając transport elektronowy w cienkich warstwach za wyróżniony kierunek przyjąć można prostopadłą do płaszczyzny warstwy (zazwyczaj oznaczany jako  $z$ ) oraz założyć, że warstwa jest nieskończenie rozciągnięta. **Pozwala to przyjąć, że funkcja  $f$  nie zależy od współrzędnych  $x$  i  $y$ .** Ten typ opisu wykorzystany został w teorii Fuchsa. Równanie (31) upraszcza się wtedy do postaci [7]:

$$\frac{eE}{mv_z} \frac{\partial f}{\partial v_x} = \frac{g}{z} + \frac{g}{\tau v_z}. \quad (32)$$

Ogólne rozwiązanie równania (32) ma postać:

$$g(v, z) = \frac{e\tau E}{m} \frac{\partial f}{\partial v_x} \left[ 1 + G(v) \exp\left(\frac{-z}{\tau v_z}\right) \right], \quad (33)$$

gdzie  $G(v)$  jest funkcją pozwalającą spełnić warunki brzegowe zagadnienia.

Najprostszym do rozpatrzenia jest przypadek całkowicie nieelastycznego rozpraszania na powierzchniach granicznych. Wtedy funkcja  $f$  dla elektronów opuszczających powierzchnię musi być niezależna od kierunku. **Warunek ten może**

być spełniony jeśli na powierzchni warstwy funkcja rozkładu jest tożsamościowo równa funkcji  $f$  w stanie równowagi. Jeśli wybierze się funkcję  $G(v)$  tak by  $g(v, 0) = 0$  dla wszystkich  $v$  ze składową  $v_z > 0$  (to jest dla elektronów oddalających się od powierzchni  $z = 0$ ) i  $g(v, d) = 0$  dla wszystkich  $v$  z  $v_z < 0$  to  $f = f_0 + g \implies f$ .

Dla elektronów ze składowymi  $v_z > 0$  i  $v_z < 0$  otrzymuje się zatem różne rozwiązania dla czynnika  $g$ :

$$g^+(v, z) = \frac{e\tau E}{m} \frac{\partial f}{\partial v_x} \left[ 1 + \exp\left(\frac{-z}{\tau v_z}\right) \right] \quad (v_z > 0), \quad (34)$$

$$g^-(v, z) = \frac{e\tau E}{m} \frac{\partial f}{\partial v_x} \left[ 1 + \exp\left(\frac{d-z}{\tau v_z}\right) \right] \quad (v_z < 0). \quad (35)$$

Znając funkcję rozkładu, wyznaczoną przez  $g$ , można korzystając z wyrażenia [7]:

$$J = 2e\left(\frac{m}{h}\right)^3 \int v f dv \quad (36)$$

wyznaczyć  $J(z)$ , które po scałkowaniu daje gęstość prądu płynącego przez warstwę (na jednostkę powierzchni w kierunku  $x$ ). Otrzymane wyrażenia są skomplikowane, jednak dla przypadków granicznych można otrzymać wyrażenia przybliżone [6]:

$$\frac{\sigma_0}{\sigma} = 1 + \frac{3\lambda}{8d} \quad \left(\frac{d}{\lambda} \gg 1\right), \quad (37)$$

$$\frac{\sigma_0}{\sigma} = \frac{4\lambda}{3d \ln \frac{\lambda}{d}} \quad \left(\frac{d}{\lambda} \ll 1\right), \quad (38)$$

gdzie  $d$  oznacza grubość warstwy,  $\sigma$  przewodność właściwą cienkiej warstwy a  $\sigma_0$  przewodność właściwą próbki objętościowej.

Rozważania mogą być uogólnione poprzez przyjęcie, że **część  $p$  elektronów ulega na powierzchniach zewnętrznych rozpraszaniu sprężystemu** (tzn.  $v_x$  przed i po rozproszeniu jest taka sama) a pozostałe jak uprzednio rozpraszane są dyfuzyjnie<sup>16</sup>. Wzory (37) i (38) przyjmują wtedy postać:

$$\frac{\sigma_0}{\sigma} = 1 + \frac{3\lambda}{8d} \left( \frac{d}{\lambda} - p \right) \quad \left( \frac{d}{\lambda} \gg 1 \right), \quad (39)$$

$$\frac{\sigma_0}{\sigma} = \frac{4\lambda}{3d(1+2p) \ln \frac{\lambda}{a}} \quad \left( \frac{d}{\lambda} \ll 1 \right). \quad (40)$$

Powyższe równania wskazują, że przewodnictwo właściwe cienkich warstw jest niższe niż w przypadku przewodników objętościowych wykonanych z tych samych materiałów.

Równanie (37) stanowi podstawę analizy przewodności w niniejszym ćwiczeniu. Uwzględniając, że  $\rho \equiv 1/\sigma$  równanie (37) przekształcić można do postaci:

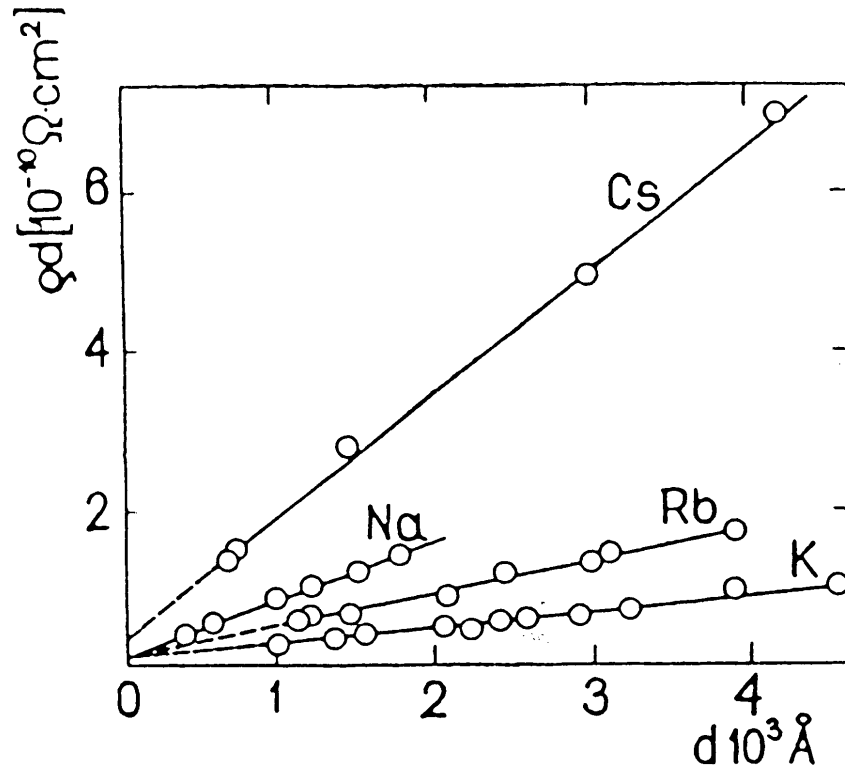
$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{3\lambda}{8d} \right), \quad (41)$$

a po pomnożeniu przez grubość otrzymuje się:

$$\rho d = \rho_0 d + \frac{3\lambda\rho_0}{8}. \quad (42)$$

Z równania (42) wynika, że według teorii Fuchsa-Sondheimera (dla przypadku  $d/\lambda \gg 1$ ) czynnik  $\rho d$  jest liniową funkcją grubości warstwy. **Równanie (42) wykorzystywane jest w niniejszym ćwiczeniu do wyznaczenia  $\lambda$  i  $\rho_0$ .**

<sup>16</sup>Gdyby wszystkie elektrony ulegały rozpraszaniu sprężystemu ( $p = 1$ ) wtedy rozpraszanie nie zmieniałoby składowej prędkości w kierunku pola elektrycznego i oporność nie zależałaby od grubości warstwy.



Rysunek 1: Zmiana  $\rho d$  w zależności od grubości cienkich warstw Cs, Na, Rb i K naporowanych w temperaturze 90 K [6].

Rzeczywiście jak pokazują wyniki eksperymentalne oporność przynajmniej niektórych rodzajów cienkich warstw spełnia zależność (42). Pamiętać jednak należy, że są to tylko przypadki szczególne i opis przewodności cienkich warstw wymaga zastosowania pełnych równań teorii Fuchsa wraz z jej uogólnieniami (np. uwzględnianie różnych wartości czynnika  $p$  dla dolnej i górnej granicy warstwy, uwzględnienia zależności  $p$  od kąta padania elektronu na powierzchnię rozpraszającą). Dla pełnego opisu zależności  $\rho(d)$  uciec należy się do kwantowej teorii ciała stałego.

# Przebieg ćwiczenia

## Cel ćwiczenia:

- pomiar zależności oporu właściwego od grubości cienkich warstw z wykorzystaniem sondy czteropunktowej
- interpretacja wyników w oparciu o teorię Fuchsa-Sondheimera
- wyznaczenie średniej drogi swobodnej elektronów

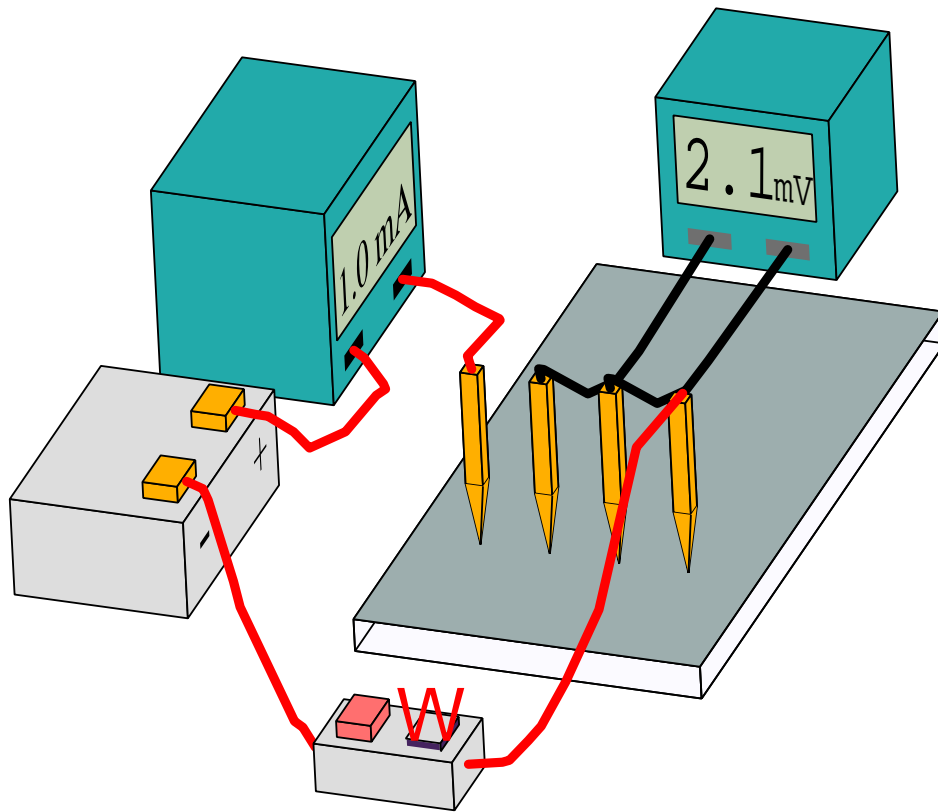
W ćwiczeniu wykorzystuje się cienkie warstwy stopowe naniesione na podłoże szklane (grubość ok. 1 mm) metodą **rozpylania katodowego**. Warstwy mają kształt klina tzn. na jednym końcu szklanego podłoża grubość warstwy jest znacznie wyższa ( $d \approx 200nm$ ) niż na drugim końcu klina.

Schematycznie przekrój warstwy w kształcie klina, badanej w niniejszym ćwiczeniu, przedstawia się następująco:





# Układ pomiarowy



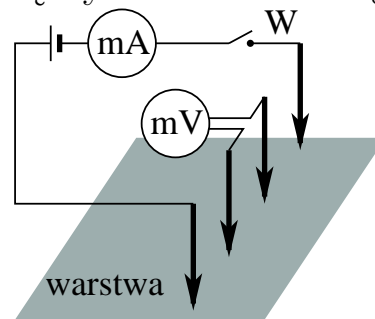
Schemat układu pomiarowego. Kolorem czerwonym zaznaczone są przewody prądowe.

- Układ pomiarowy składa się z amperomierza, woltomierza, stabilizowanego źródła prądu oraz sondy cztero-punktowej.
- Wyłącznik **W** może być przełączany do pozycji umożliwiającej przepływ prądu tylko na czas pomiaru napięcia. W czasie wszystkich innych czynności związanych z przemieszczaniem próbki względem sondy czteropunktowej wyłącznik **W** musi pozostawać w pozycji otwartej. W przeciwnym przypadku warstwa uleg może uszkodzeniu.
- Podczas przemieszczania próbki (warstwy) względem sondy czteropunktowej głowica pomiarowa musi być uniesiona by uniknąć zarysowań warstwy.

W trakcie ćwiczenia dokonuje się pomiaru **oporu warstwy**, tzn. **stosunku napięcia na elektrodach napięciowych sondy czteropunktowej do natężenia prądu przepływającego przez elektrody prądowe** (patrz str. 13), w funkcji jej grubości. Ponieważ badana warstwa ma różną grubość w różnych miejscach (klin) pomiar w funkcji grubości sprowadza się do pomiaru oporu w różnych miejscach próbki. Pomiarów wykonywać należy zaczynając od cienkiego końca warstwy (obszar o niższej grubości) (cienki koniec warstwy jest półprzezroczysty, obszar na który naniesiono grubsza warstwę praktycznie nie przepuszcza światła). **Grubość warstwy w różnych miejscach została zmierzona uprzednio i należy odczytać ją z zależności  $d(x)$** , gdzie  $x$  oznacza odległość od cienkiego końca warstwy.

### Przebieg pomiaru:

Przed rozpoczęciem pomiarów należy połączyć układ według schematu:



Pomiaru oporu należy dokonywać dla  $x$  różniących się o 5mm (wzdłuż długiej krawędzi warstwy) poczynając od  $x_0 = 5mm$ .

Zmieniając miejsce pomiaru na próbce należy:

1. wyłączyć przepływ prądu przez próbkę
2. unieść głowicę pomiarową
3. przesunąć próbkę
4. opuścić głowicę
5. przeprowadzić następny pomiar

Pomiar każdej próbki powinien mieć dokumentację w formie tabeli zawierającej następujące dane:

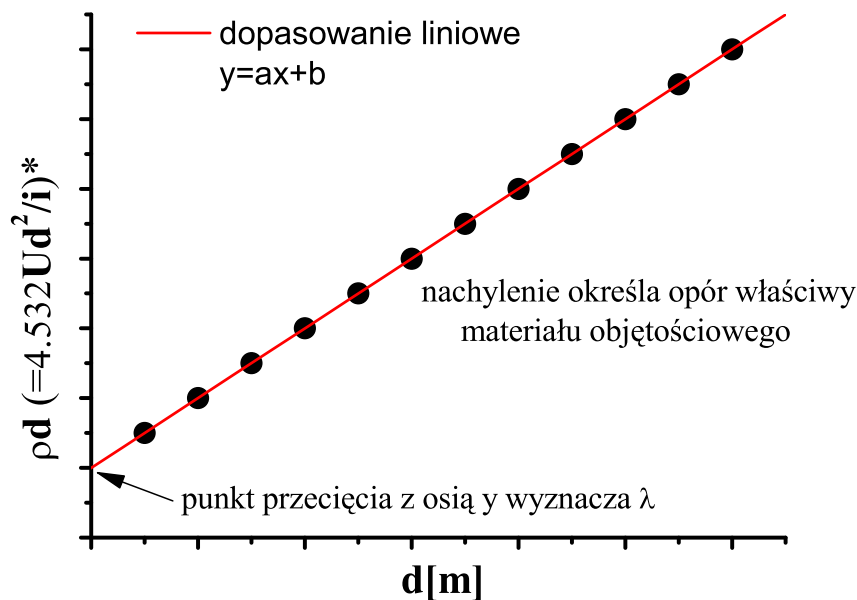
Próbka Nr.....  
materiał...

X[mm]	d[nm]	I[mA]	U[mv]	$\rho[\Omega m]$	$\rho d[\Omega m^2]$

Wartość  $\rho$  wyznacza się z równania<sup>17</sup>  $\rho = 4.532Ud/i$  (str.13) a następnie, korzystając z parametrów dopasowania liniowego, z zależności (42) wyznacza się  $\rho_0$  i  $\lambda$ :

<sup>17</sup>Równanie to wyprowadzone zostało dla przypadku nieskończonej rozciągłej warstwy przewodzącej. W przypadku warstw o innych kształtach (np. prostokąt) wprowadza się korygujący mnożnik [4].

- ponieważ z równania (42) ( $\rho d = \rho_0 d + \frac{3\lambda\rho_0}{8}$ ) wynika, że  $\rho d$  jest liniową funkcją grubości warstwy  $d$ , wyniki eksperymentalne można próbować opisać zależnością typu  $y = ax + b$ , gdzie  $x$  odpowiada grubości warstwy (patrz również-wykres na str. 29).
- parametr  $a$  dopasowania równy jest zatem  $\rho_0$ , czyli oporowi właściwemu próbki objętościowej
- Znając  $\rho_0$  w oparciu o parametr  $b$  dopasowania można wyznaczyć  $\lambda$  ( $b = \frac{3}{8}\lambda\rho_0$ ).



\*  $\rho d = 4.532 \frac{U d^2}{i} d$ .

**Zagadnienia jakie należy opanować w ramach przygotowania do ćwiczenia:**

1. lokalna postać prawa Ohma
2. rozpraszanie elektronów przewodnictwa; reguła Matthiessena
3. średnia droga swobodna elektronów w metalach
4. teoria Drudego
5. efekt rozmiarowy Thompsona
6. teoria Fuchsa-Sondheimera efektu rozmiarowego (bez wyprowadzeń)
7. sonda cztero-punktowa

**Przed zakończeniem ćwiczenia należy wykonać kontrolne wykresy:**

1. oporu w funkcji grubości warstwy ( $R(d)$ )
2. iloczynu  $\rho d$  w funkcji grubości warstwy

**dla wszystkich badanych warstw.**

Po skończeniu pomiarów należy rozmontować układ pomiarowy i **uporządkować stanowisko.**

## Literatura

- [1] F. S. Taylor, Historia nauk przyrodniczych w zarysie, PWN, Warszawa 1962
- [2] Słownik Fizyczny, praca zbiorowa, Wiedza Powszechna, Warszawa 1984
- [3] Podręcznik on-line, praca zbiorowa, Massachusetts Institute of Technology, Boston, USA  
[\www.mit.edu/afs/athena/course/6/6.013\\_book/OldFiles/www/navigate.html](http://www.mit.edu/afs/athena/course/6/6.013_book/OldFiles/www/navigate.html)
- [4] H. H. Wieder, Laboratory notes on electrical and galvanomagnetic measurements, Elsevier, Amsterdam 1979
- [5] C. Kittel, Wstęp do fizyki ciała stałego, PWN, Warszawa 1970
- [6] J. Rudny, rozdział 3 pracy „Cienkie warstwy metaliczne” pod redakcją W. Romanowskiego, PWN, Warszawa 1974
- [7] „Handbook of thin film technology”, po redakcją L. I. Maissel’a i R. Glanga, Mc Graw-Hill Book Company (1970)