

Instytut Fizyki Molekularnej  
Polskiej Akademii Nauk

**ROZPRAWA  
DOKTORSKA**

Poznań

**Damian Tomaszewski**

**Rozdzielanie i detekcja  
kwantowego splątania  
par Coopera**

**Damian Tomaszewski**

*Rozdzielanie i detekcja kwantowego splątania par Coopera*

Instytut Fizyki Molekularnej Polskiej Akademii Nauk

Mariana Smoluchowskiego 17

60-179 Poznań

Rok wydania: 2020

**ISBN: 978-83-956445-4-2**

Instytut Fizyki Molekularnej Polskiej Akademii Nauk



Rozprawa doktorska

# Rozdzielanie i detekcja kwantowego splątania par Coopera

mgr inż. Damian Tomaszewski

Promotor: prof. dr hab. Jan Martinek

Zakład Nadprzewodnictwa i Przemian Fazowych

Poznań 2015



Serdecznie dziękuję Panu Profesorowi Janowi Martinkowi za naukową opiekę, oraz wszelką pomoc w trakcie studiów doktoranckich i podczas edycji tej pracy.

Dziękuję również Bliskim oraz Koleżankom i Kolegom za pomoc i wsparcie. W szczególności dziękuję Żonie Agacie za wiarę i motywację w dążeniu do celu. Dziękuję Piotrowi Buszowi za liczne dyskusje i pomoc podczas zgłębiania zagadnień teorii ciała stałego.

Praca powstała dzięki wsparciu 7. Programu Ramowego UE - projekt SE2ND (nr 271554) oraz w ramach grantu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego nr N N202 207938 na lata 2009-2015.



# Spis treści

<b>Streszczenie</b> . . . . .	9
<b>Abstract</b> . . . . .	11
<b>Wstęp</b> . . . . .	13
<b>Rozdział 1. Wprowadzenie do informatyki kwantowej</b> . . . . .	17
1.1. Główne cechy informatyki kwantowej . . . . .	18
1.2. Przykłady zastosowań informatyki kwantowej . . . . .	22
<b>Rozdział 2. Nadprzewodnik - źródło splątanych elektronów</b> . . . . .	25
2.1. Teoria BCS . . . . .	25
2.2. Teoria Ginzburga-Landaua . . . . .	29
2.3. Mechanizm rozdzielania par Coopera . . . . .	32
2.3.1. Efekt bliskości . . . . .	32
2.3.2. Kropki kwantowe . . . . .	33
2.4. Transport w układzie podwójnej kropki kwantowej . . . . .	37
2.5. Pomiary eksperymentalne . . . . .	40
<b>Rozdział 3. Rozdzielanie par Coopera w złączu Josephsona z podwójną kropką kwantową</b> . . . . .	43
3.1. Tunelowanie sekwencyjne i wspóltunelowanie . . . . .	43
3.2. Efekt Josephsona . . . . .	45
3.3. Model . . . . .	46
3.4. Niezależny od czasu, niezdegenerowany rachunek zaburzeń . . . . .	48
3.5. Prąd Josephsona . . . . .	50
3.5.1. Stan podstawowy $ S\rangle_{DQD}$ . . . . .	51
3.5.2. Stan podstawowy $ 0\rangle_{DQD}$ . . . . .	57
3.5.3. Stan podstawowy $ \uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$ (lub $ \downarrow\downarrow\rangle_{DQD}$ ) . . . . .	59

3.6.	Sprawność rozdzielania par Coopera . . . . .	60
3.7.	Podsumowanie . . . . .	61
<b>Rozdział 4. Lokalne i nielokalne efekty interferencyjne w złączu Josephsona . .</b>		<b>65</b>
4.1.	Oddziaływanie spin-orbita Rashby . . . . .	66
4.2.	Złącze Josephsona z podwójną kropką kwantową . . . . .	68
4.3.	Złącze Josephsona z pierścieniem półprzewodnikowym . . . . .	74
4.4.	Podsumowanie . . . . .	76
<b>Rozdział 5. Nadprzewodzący efekt bliskości w kropkach kwantowych . . . . .</b>		<b>79</b>
5.1.	Procesy IV rzędu . . . . .	80
5.2.	Wpływ oddziaływań spin-orbita Rashby na stan podstawowy układu . . . . .	85
5.3.	Podsumowanie . . . . .	86
<b>Rozdział 6. Rozdzielanie par Coopera w podwójnej kropce kwantowej w zakresie współtunelowania . . . . .</b>		<b>87</b>
6.1.	Model . . . . .	87
6.2.	Dozwolone procesy tunelowania . . . . .	89
6.3.	Sprawność rozdzielania par Coopera . . . . .	93
6.4.	Podsumowanie . . . . .	94
<b>Rozdział 7. Detekcja stanu splątania kwantowego . . . . .</b>		<b>97</b>
7.1.	Ukryte zmienne i nierówności Bella . . . . .	97
7.2.	Kryterium separowalności i świadek splątania . . . . .	99
7.3.	Detekcja splątania kwantowego za pomocą nieidealnych detektorów ferromagnetycznych . . . . .	101
7.3.1.	Polaryzacja spinowa i pomiar spinu elektronu . . . . .	103
7.3.2.	Równoważność nieidealnego pomiaru i kanału depolaryzacyjnego . . . . .	106
7.3.3.	Świadek splątania . . . . .	107
7.3.4.	Nierówności Bella - nierówność CHSH . . . . .	111
7.3.5.	Nieidealne źródło splątanych elektronów . . . . .	112
7.3.6.	Relaksacja spinowa i rozfazowanie . . . . .	113
7.3.7.	Asymetryczne detektory ferromagnetyczne . . . . .	117
7.4.	Podsumowanie . . . . .	117
<b>Rozdział 8. Detekcja stanu splątania kwantowego par Coopera za pomocą pomiarów prądu elektrycznego . . . . .</b>		<b>119</b>
8.1.	Model . . . . .	119



---

8.2. Detekcja stanu splątania kwantowego . . . . .	122
8.3. Podsumowanie . . . . .	124
<b>Podsumowanie . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>Dodatek A. Prąd Josephsona w układzie sprzężonych kropek kwantowych . . .</b>	<b>131</b>
<b>Dodatek B. Świadek splątania i stany separowalne . . . . .</b>	<b>133</b>
<b>Spis publikacji autora . . . . .</b>	<b>135</b>
<b>Uczestnictwo w konferencjach i szkołach międzynarodowych . . . . .</b>	<b>137</b>
<b>Bibliografia . . . . .</b>	<b>141</b>



# Streszczenie

W rozprawie doktorskiej przedstawiono badania i analizy teoretyczne związane z rozwojem wysoko wydajnego i stałego źródła rozdzielonych przestrzennie, splątanych kwantowo spinów elektronów w układzie ciało-stalowym, a także nanourządzeń, które pozwolą na skuteczne wykrywanie i analizę własności elektronowych stanów splątanych. Takie źródło, zintegrowane z innymi elementami elektronicznymi i detektorami magnetycznymi, będzie mieć duże znaczenie w rozwoju przyszłych procesorów kwantowych, które mogą zapewnić, na przykład, dystrybucję stanu splątania wymaganą do synchronizacji układów kwantowych, oraz umożliwiają bezpieczną komunikację.

W niniejszych badaniach wykorzystano splątane kwantowo stany elektronów par Coopera (spinowy stan singletowy), które naturalnie występują w stanie podstawowym nadprzewodnika. Taką parę można rozdzielić korzystając z układu podwójnej kropki kwantowej połączonej z nadprzewodnikiem, gdzie ze względu na silne oddziaływanie kulombowskie dwa elektrony w parze są rozdzielone przestrzennie, kierując się do dwóch różnych kanałów wyjściowych, przy zachowaniu swojego splątania. Zbadana została teoretycznie możliwość wykorzystania magnetycznych elektrod podłączonych do kropek kwantowych, które mogą pracować jako detektory spinów elektronów zamieniając spinową informację na ładunkową, ze względu na spinowo-zależny transport elektryczny w materiałach ferromagnetycznych.

Została przeanalizowana sprawność rozdzielania par Coopera w układach, gdzie kropki kwantowe są podłączone do dwóch nadprzewodzących elektrod lub do nadprzewodzącej i dwóch normalnych elektrod. Obliczenia zostały przeprowadzone w zakresie wspóltunelowania, w którym para elektronów jednocześnie tuneluje przez cały układ. Zbadany został nowy efekt Aharonova-Casher dla par Coopera, który związany jest z efektywną precesją spinu, której podlega poruszający się moment dipolowy w polu elektrycznym na skutek obecności oddziaływania spin-orbita typu Rashby.

Zbadana została możliwość zastosowania ferromagnetycznych elektrod jako skutecznego kwantowego detektora stanu splątanego. Przedstawiono model przyszłych eksperymentów badających stan splątany elektronów z realistycznymi parametrami, w celu wyznaczenia odpowiednich warunków dla wielkości spinowej polaryzacji detektorów magnetycznych i dopuszczalnej wielkości szumów w układzie. Pokazano możliwość odczytu informacji kwantowej dotyczącej kwantowych korelacji, korzystając z klasycznych pomiarów, takich jak prąd elektryczny.

Przedstawione w pracy wyniki potwierdzają możliwość praktycznego zastosowania nadprzewodnika jako źródła splątanych kwantowo par elektronów oraz wskazują na możliwość eksperymentalnej detekcji stanu splątania kwantowego w układach ciało-stałych.

# Abstract

This PhD thesis presents the studies and the theoretical analyses related to the development of a highly efficient and continuous solid-state source of spatially separated spin-entangled electrons as well as nano-devices that allow to detect and investigate entangled electrons effectively. That kind of a source, which is integrated with other electronic elements and magnetic detectors, will have a great impact on the future quantum processors development. They can provide, for example, entanglement distribution which is essential to synchronize quantum circuits and which enables secure communication.

The presented study is based on entangled electrons of Cooper pairs that naturally occur in the ground state of a superconductor. Thanks to the usage of a strong Coulomb interaction in a double quantum dot system the two electrons of the pair can be spatially separated. Subsequently, the separated electrons move towards two different output channels while still maintaining their entanglement. The possibility of using the ferromagnetic electrodes connected to each quantum dot of Cooper pairs splitter, which can work as spin detectors transforming the spin information directly into an electric current due to a spin-dependent electronic transport in the ferromagnetic materials, was theoretically studied as well.

The analysis of an efficiency of the separation of Cooper pairs in systems, where the quantum dots are connected to the two superconducting leads, or to the superconducting and two normal leads was conducted. The cotunneling regime, in which a simultaneous tunneling of electron pairs occur through the whole system, was thoroughly investigated. Additionally, the Aharonov-Casher effect, related to the effective spin precession - a travelling magnetic dipole is affected by an electric field due to the presence of Rashba spin-orbit interaction, was discussed in this system.

The possibility of using the ferromagnetic electrodes as an effective detector of quantum entanglement was also examined. The model of the future experiments investigating

the entangled state, with realistic parameters in order to set the proper margins on the required spin-polarization of the ferromagnetic detectors and noise detection limit, was shown. Finally, the method of extracting the quantum information using the classical quantities as an electric current was demonstrated.

The results presented in this dissertation confirm the possibility of a practical application of superconductors as a source of quantum entangled electrons pairs and indicate the possibility of experimental detection of the quantum entanglement state in a solid-state systems.

# Wstęp

Celem pracy jest rozwinięcie teorii wydajnego źródła przestrzennie rozdzielonych splątanych kwantowo par elektronów, które mogą być zastosowane jako mobilne kubity („flying qubits”) w zintegrowanych i skalowalnych układach scalonych kwantowej informatyki, a także zaproponowanie skutecznych metod i technologii detekcji spinowych splątanych stanów kwantowych elektronów.

Zgodnie z empirycznym prawem Moore’a ekonomicznie optymalna liczba tranzystorów w układzie scalonym podwaja się w niemal równych odcinkach czasu (obecnie co około 24 miesiące). Od wielu lat pojawiają się opinie, że okres stosowalności prawa Moore’a dobiega końca, a zatem możemy zbliżać się do granicy możliwości obliczeniowych klasycznych komputerów, która ściśle zależy od liczby tranzystorów w układzie scalonym. Rozmiar obecnie produkowanych tranzystorów jest rzędu dziesiątek nanometrów, czyli jest niewiele większy od granicznego rozmiaru związanego z rozmiarem atomu. Podobnie prędkość przesyłania informacji ograniczona jest przez prędkość światła. Jako jedno z rozwiązań, w celu zwiększenia szybkości obliczeń klasycznych komputerów stosuje się układy wieloprocessorowe i przetwarzanie równoległe, ale również to ma ograniczenia związane z czasem koniecznym na dzielenie programu między procesorami. Poszukiwane są zatem nowe rozwiązania zwiększające moc obliczeniową komputerów i jednym z nich jest zastosowanie komputerów kwantowych opartych na nowej jednostce informacji - kubitach, gdzie algorytmy wykonywane są na podstawie praw mechaniki kwantowej.

Jako fizyczną realizację kubitów najpowszechniej stosuje się fotony, a ich splątanie, badane jest z dużym zainteresowaniem od roku 1982, kiedy po raz pierwszy doświadczalnie zrealizowano EPR Gedankenexperiment (eksperyment myślowy EPR) [1, 2]. Do wytwarzania fotonów o splątanych polaryzacjach powszechnie używa się parametrycznego dzielnika częstości w nieliniowych kryształach [3, 4], lecz ta metoda charakteryzuje się dość niską sprawnością wytwarzania splątanych par ( $< 10^{-6}$ ). Z punktu widzenia bu-

dowy użytecznych komputerów kwantowych konieczne jest uzyskanie układu splątanych kubitów w ciele stałym. Jedną z propozycji realizacji kubitów w ciele stałym, jest wykorzystanie spinowych stopni swobody elektronów [5]. Pojedyncze, spinowe, kubity mogą być realizowane w kropkach kwantowych, jak również z powodzeniem można wykonywać na nich operacje [6, 7]. Elektron z powodzeniem może również być zastosowany jako nośnik przesyłania informacji - mobilny kubit.

Jedną z propozycji uzyskania splątanych elektronów, jest zastosowanie nadprzewodnika, gdzie naturalnie, w stanie podstawowym mamy splątane pary elektronów - pary Coopera w stanie singletowym. Niedawno pokazano udane eksperymentalne próby „wyciągnięcia” z nadprzewodnika i rozdzielania splątanych par elektronów [8, 9], również ze sprawnością sięgającą jedności [10, 11]. Układy eksperymentalne składały się z podwójnej kropki kwantowej sprzężonej z nadprzewodnikiem i dwoma elektrodami normalnymi, gdzie dzięki silnym oddziaływaniom kulombowskim na kropkach kwantowych, niepozwalającymi na podwójne obsadzenie pojedynczej kropki kwantowej, udało się wymusić rozdzielanie pary Coopera.

Pierwszy rozdział rozprawy zawiera wprowadzenie do informatyki kwantowej. Omówione zostaną w nim dwie podstawowe cechy informacji kwantowej, czyli kubit jako podstawowa jednostka informacji, oraz splątanie kwantowe. W rozdziale zostaną przedstawione również przykłady zastosowań informatyki kwantowej. W rozdziale drugim zostanie omówiony nadprzewodnik, jako naturalne źródło splątanych elektronów oraz zanalizowany zostanie mechanizm „wyciągania” i rozdzielania par Coopera.

Rozdziały trzeci i czwarty poświęcony będzie złączu Josephsona z podwójną kropką kwantową oraz lokalnym i nielokalnym efektom interferencyjnym występującym w tym złączu - efekty Aharonova-Bohma i Aharonova-Casherera. Zostaną pokazane procesy odpowiadające za prąd Josephsona w zakresie współtunelowania, określona zostanie sprawność rozdzielania par Coopera w układzie. Przeanalizowany zostanie wpływ strumienia pola magnetycznego oraz oddziaływań spin-orbita Rashby na prąd płynący przez układ. Uzyskane wyniki porównane zostaną do wyników otrzymanych dla układu dwóch elektrod nadprzewodzących z pierścieniem półprzewodnikowym bez kropek kwantowych. W rozdziale piątym pokazany zostanie wpływ bliskości nadprzewodnika na stan podstawowy kropek kwantowych oraz przedstawiona zostanie możliwość wytwarzania „egzotycznych” nadprzewodzących stanów splątanych za pomocą efektu oddziaływania spin-orbita Rashby. Rozdział szósty zawiera analizę rozdzielania par Coopera w układzie podwójnej



---

kropki kwantowej sprzężonej z elektrodą nadprzewodzącą i dwoma elektrodami normalnymi w zakresie współtunelowania.

Rozdział siódmy poświęcony będzie metodom detekcji kwantowego splątania par elektronów w stanie singletowym, za pomocą ferromagnetycznych detektorów. Przedstawiona zostanie implementacja w układach ciało-stałych metody detekcji splątania kwantowego powszechnie stosowanej w układach optycznych - operatora świadka splątania. Przeanalizowane zostaną wymagania jakie muszą spełniać detektory ferromagnetyczne pod względem minimalnej polaryzacji spinowej. W rozdziale ósmym omówiona zostanie możliwość detekcji splątania kwantowego na podstawie bezpośrednich pomiarów prądu stałego.



## Rozdział 1

# Wprowadzenie do informatyki kwantowej

Szybkość przetwarzania informacji przez klasyczne komputery ściśle związana jest z liczbą tranzystorów tworzących procesor. Liczbę tranzystorów możemy zwiększać głównie dzięki stosowaniu coraz mniejszych komponentów podczas wytwarzania układów scalonych. Rozwój technologii fabrykacji procesorów jest w przybliżeniu zgodny z empirycznym prawem Moore'a, które mówi, że ekonomicznie optymalna liczba tranzystorów w układzie scalonym podwaja się w niemal równych odcinkach czasu (obecnie co około 24 miesiące). Większość współczesnych procesorów produkowanych jest w technologii 22 nm, oznaczającą minimalną długość kanału tranzystora. Pozwala to na umieszczenie 1.4 miliarda tranzystorów w matrycy o powierzchni 160 mm<sup>2</sup>, dla procesorów z serii IvyBridge produkowanych przez firmę Intel. Szacuje się, że dalszy wzrost upakowania tranzystorów osiągnięty zostanie w roku 2016, dzięki zastosowaniu technologii 14 nm, a do roku 2020 powszechne stanie się wytwarzanie procesorów w technologii 11 nm. Tempo rozwoju technologii wytwarzania coraz mniejszych układów scalonych ograniczone jest wieloma czynnikami, takimi jak stosowane procesy litograficzne, dobór właściwych materiałów, rosnące koszty, duży pobór prądu oraz wydzielane ciepło przez układy elektroniczne (rosnące wraz z częstotliwością pracy). Końcowymi ograniczeniami są rozmiary atomów oraz prędkość światła, która jest górną granicą prędkości przesyłania informacji.

Oprócz wzrostu liczby tranzystorów w procesorze, alternatywnym rozwiązaniem zwiększającym szybkość przetwarzania informacji jest budowa układów wielordzeniowych oraz stosowanie przetwarzania równoległego, które wymaga, aby program był napisany w sposób umożliwiający jednoczesne obliczenia na wielu procesorach. Metoda ta ma jednak ograniczenie w postaci prawa Amdahla, zgodnie z którym zwiększenie szybkości wykonywania programu przez układ wieloprocessorowy jest ograniczone przez czas potrzebny na sekwencyjne dzielenie programu, bez względu na liczbę użytych procesorów. Istnieje zatem możliwość osiągnięcia w niedalekiej przyszłości kresu możliwości przetwarzania oraz prze-

syłania informacji przy zastosowaniu klasycznej informatyki. W związku z powyższymi przeszkodami, wiązane są duże nadzieje z teorią informacji kwantowej, jako metody wspomagającej obliczenia przeprowadzane metodami klasycznymi.

## 1.1. Główne cechy informatyki kwantowej

Teoria informacji kwantowej zajmuje się zastosowaniem unikatowych właściwości mechaniki kwantowej do opisu i przekazywania informacji [12, 13]. Podstawową jednostką informacji w informatyce kwantowej jest bit kwantowy (kubit). W odróżnieniu od klasycznego bitu, który może przyjmować tylko jedną z dwóch wartości: 0 albo 1, kubit może znajdować się w dowolnej superpozycji tych dwóch stanów. Stan kubitów możemy przedstawić za pomocą wektora:

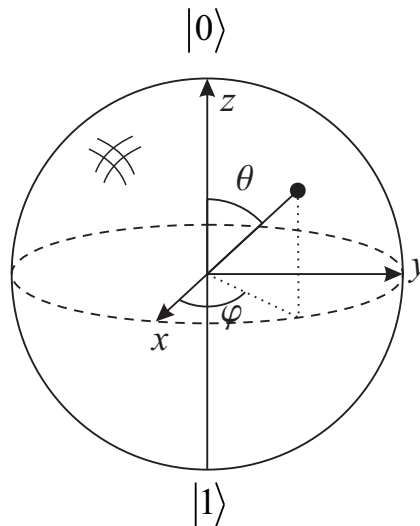
$$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle . \quad (1.1)$$

Współczynniki  $a$  i  $b$  mogą być liczbami zespolonymi i muszą spełniać warunek normalizacji  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . W rezultacie, zanedbując globalny czynnik fazowy, wyrażenie (1.1) można przekształcić do postaci:

$$|\Psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle , \quad (1.2)$$

gdzie  $\theta$  i  $\varphi$  są liczbami rzeczywistymi. Na podstawie (1.2) stan dowolnego kubitów można przedstawić graficznie jako punkt na sferze Blocha. Jest to sfera o promieniu jednostkowym, na której stan kubitów jest jednoznacznie określone przez liczby  $\theta$  oraz  $\varphi$  (Rysunek 1.1). Ponieważ sfera Blocha składa się z nieskończonej liczby punktów, wydawać by się mogło, że kubit może przechowywać nieskończoną ilość informacji. Wniosek ten jest jednak mylący, ze względu na zachowanie kubitów podczas pomiaru stanu. Mierzając stan kubitów możemy odczytać jedynie jedną z dwóch wartości:  $|0\rangle$  z prawdopodobieństwem  $|a|^2$  albo  $|1\rangle$  z prawdopodobieństwem  $|b|^2$ . Ponadto pomiar zmienia stan kubitów, powodując kolaps (załamanie) superpozycji stanów  $|0\rangle$  i  $|1\rangle$  oraz przejście do ustalonego stanu zgodnego z pomiarem. Z pojedynczego pomiaru otrzymujemy tylko pojedynczy bit informacji o stanie kubitów. Jedynie wykonując bardzo dużą liczbę pomiarów na identycznie przygotowanych kubitach, można przybliżyć amplitudy  $a$  i  $b$ , określające pełny stan kubitów.

Drugim stanem kwantowym istotnym w informatyce kwantowej jest stan splątania kwantowego. W stanie splątanym dwa (lub więcej) obiekty kwantowe, rozdzielone prze-



Rysunek 1.1. Przedstawienie wartości kubitów na sferze Blocha, na której stan kubitów jest jednoznacznie określony przez liczby  $\theta$  oraz  $\varphi$ .

strzennie na dowolnie dużą odległość, stanowią przez cały czas nierozdzielony układ. Stan całego układu jest lepiej określony, niż stan jego elementów składowych. Dla pary kubitów stan splątany może wyglądać następująco:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2) , \quad (1.3)$$

gdzie indeksy 1 i 2 wskazują numer kubitów. Stan ten jest superpozycją dwóch stanów, w których pierwszy kubit znajduje się w stanie  $|0\rangle$ , a drugi w stanie  $|1\rangle$  i równocześnie kubit pierwszy jest w stanie  $|1\rangle$ , a kubit drugi w stanie  $|0\rangle$ . Stanu splątanego nie można zapisać w postaci iloczynu tensorowego stanu dwóch kubitów:

$$|\Psi\rangle \neq (a_1|0\rangle_1 + b_1|1\rangle_1) \otimes (a_2|0\rangle_2 + b_2|1\rangle_2) . \quad (1.4)$$

Wynika z tego, że dokonanie pomiaru stanu jednego z kubitów natychmiast ustala stan drugiego kubitów, niezależnie od odległości między nimi. Traktowanie splątanego układu kwantowego jako połączenie dwóch niezależnych układów wymagałoby przesyłania informacji z prędkością większą niż prędkość światła, co jest sprzeczne z teorią względności. Wniosek ten był podstawą pracy Einsteina, Podolsky'ego i Rosena [2], w której sygnalizowano możliwość niekompletności mechaniki kwantowej oraz mylnie sugerowano istnienie pewnych ukrytych zmiennych, za pomocą których można wyjaśnić pomiar stanu splątanego. Założenia sugerowane przez autorów wymuszają istnienie pewnych statystycznych

korelacji wyników pomiarów, które muszą spełniać tzw. nierówności Bella [14], które zostaną omówione w dalszej części pracy.

Najistotniejsze, z punktu widzenia zastosowań w algorytmach kwantowych, są stany maksymalnie splątane, tworzące ortonormalną bazę Bella. W stanach maksymalnie splątanych moduły amplitud prawdopodobieństwa są sobie równe. Dla układów składających się z dwóch kubitów mają one postać:

$$|\beta_0^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|0\rangle_2 \pm |1\rangle_1|1\rangle_2) , \quad (1.5)$$

$$|\beta_1^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|1\rangle_2 \pm |1\rangle_1|0\rangle_2) . \quad (1.6)$$

Dzięki możliwości wykonywania operacji jednocześnie na wszystkich możliwych stanach komputery kwantowe są w stanie wykonać niektóre operacje szybciej niż układy klasyczne, a także umożliwią one symulację zachowań złożonych układów kwantowych. W 1997 roku D. P. DiVincenzo podał pięć kryteriów, które muszą spełniać komputery kwantowe, aby były użyteczne [15]:

1. Skalowalność z dobrze zdefiniowanymi kubitami.
2. Możliwość inicjalizacji układu w dobrze określonym stanie.
3. Długie czasy dekoherencji kubitów - dużo dłuższe niż czas operacji bramek.
4. Możliwość utworzenia uniwersalnego zbioru bramek kwantowych.
5. Możliwość selektywnego odczytu kubitów.

Kryteria te zostały uzupełnione o kolejne dwa [16] niezbędne do komunikacji kwantowej:

6. Możliwość przekształcenia stacjonarnych kubitów w kubity mobilne i odwrotnie.
  7. Możliwość przesyłania mobilnych kubitów pomiędzy dowolnie określonymi miejscami.
- Największym wyzwaniem technologicznym komputerów kwantowych jest połączenie łatwego dostępu do kubitów (inicjalizacja, kontrola, odczyt) z wysokim stopniem izolacji (koherencji) w skalowalnym układzie.

Fizycznie kubit można zrealizować za pomocą dowolnego układu dwupoziomowego. Najbardziej znanym przykładem jest wykorzystanie polaryzacji fotonów, gdzie za pomocą superpozycji polaryzacji poziomej i pionowej można przedstawić dowolną wartość kubitów. Zastosowanie fotonów pozwala na przesyłanie informacji na duże odległości. Dzięki wykorzystaniu magnetycznego rezonansu jądrowego, kubit można zrealizować poprzez spin jądrowy. Stany spinowe jąder atomowych pozwalają na długie przechowywanie informacji kwantowej, ale nie spełniają wymagań dotyczących mobilności kubitów niezbędnych

w komunikacji kwantowej oraz utrudnione jest skalowanie, ze względu na konieczność wytworzenie wielu spinów jądrowych odpowiednio sprzężonych. Interesującą metodą wytwarzania kubitów jest zastosowanie układów nadprzewodzących, które w odróżnieniu od np. spinów, mają tendencję do dość dobrego sprzężenia z pozostałymi elementami układu elektronicznego, co czyni je atrakcyjnymi z punktu widzenia odczytu oraz realizacji bramek, a także można je łatwo skalować. Jedne z możliwych konstrukcji to układy składające się z nadprzewodzącej wyspy połączonej poprzez złącza Josephsona z nadprzewodzącymi elektrodami [17]. W zależności od stosunku energii ładowania wyspy do energii Josephsona mamy do czynienia z kubitami ładunkowymi [18] lub kubitami opartymi na stanach fazowych [19]. Innym przykładem nadprzewodzących kubitów jest wykorzystanie efektu kwantowania strumienia pola magnetycznego w nadprzewodzących pierścieniach, gdzie stany kubitów określone są przez kierunek przepływu prądu przez pętlę (zgodny lub przeciwny do ruchu wskazówek zegara) [20]. Wadą kubitów nadprzewodzących są krótkie czasy dekoherencji [21]. Interesująca jest również możliwość realizacji kubitów na półprzewodnikowych kropkach kwantowych, gdzie stan kubitów może być związany zarówno z ładunkowymi jak i spinowymi stopniami swobody. Jedną z możliwości realizacji kubitów jest wykorzystanie stanów ekscytonowych (par elektron - dziura) generowanych optycznie przez impulsy światła na kropkach kwantowych [22, 23, 24, 25]. Innym rozwiązaniem jest zastosowanie dwóch sprzężonych kropek kwantowych, gdzie stan kubitów związany jest z przebywaniem elektronu na pierwszej bądź drugiej kropce [26, 27, 28]. W układzie dwóch kropek kwantowych wytworzonych na GaAs udało się eksperymentalnie zrealizować kubitów z zastosowaniem spinu elektronu [29, 30]. Kubitów oparte na spinach elektronu powinny charakteryzować się dłuższymi czasami dekoherencji [31], jednak w celu zniesienia degeneracji spinu konieczna jest obecność zewnętrznego pola magnetycznego.

W dalszej części pracy omawiana będzie możliwość zastosowania spinów elektronów jako kubitów, w których stanami bazowymi są rzuty spinu na wybrany kierunek. Równania (1.1), (1.2) dla spinów elektronu możemy zapisać w postaci:

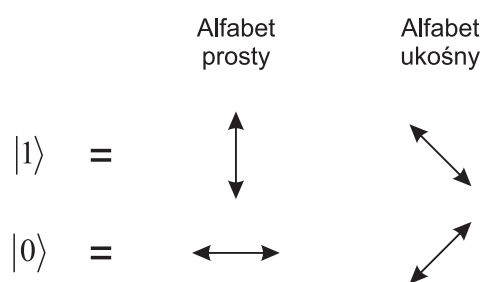
$$|\Psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle, \quad (1.7)$$

$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle. \quad (1.8)$$

## 1.2. Przykłady zastosowań informatyki kwantowej

Jednym z pierwszych algorytmów wykorzystujących paralelizm kwantowy był opracowany w 1994 roku algorytm Shora. Pozwala on na rozkład dużych liczb naturalnych na czynniki pierwsze, w czasie znacząco krótszym (wielomianowym), niż przy użyciu klasycznych komputerów i algorytmów. W 2001 roku zademonstrowano doświadczalnie działanie tego algorytmu na komputerze kwantowym, opartym o jądrowy rezonans magnetyczny, dokonując faktoryzacji liczby 15 [32]. W 2011 roku udało się dokonać faktoryzacji liczby 21 [33]. Algorytm Shora dał impuls do opracowania nowych algorytmów dla informatyki kwantowej oraz prac nad budową komputerów kwantowych. Do zbudowania użytecznego komputera kwantowego potrzebna jest duża liczba splątanych kubitów, których działanie będzie niewrażliwe na wpływ otoczenia. Najnowszym osiągnięciem jest budowa nadprzewodzącego komputera kwantowego z układem korekcji błędów, w którym w liniowej macyry umieszczono 9 kubitów [34]. Jest to jeszcze niewystarczająca liczba kubitów, aby mówić o docelowym komputerze kwantowym. Natomiast do zastosowań w kryptografii, czy w teleportacji kwantowej wystarczy już kilka kubitów.

Termin kryptografia kwantowa oznacza kwantową dystrybucję klucza kryptograficznego. Pierwszym algorytmem kryptografii kwantowej był algorytm zaproponowany przez C. H. Bennetta i G. Brassarda [35], który można przedstawić na przykładzie przesyłania informacji za pomocą fotonów spolaryzowanych w bazie prostej i obróconej o  $45^\circ$  bazie ukośnej (Rysunek 1.2). Nadawca przesyła, za pomocą kanału kwantowego (np. światłowodem), fotony o losowej polaryzacji z dowolnego alfabetu. Odbiorca dokonuje pomiaru polaryzacji każdego fotonu, wybierając losowo pomiar w bazie prostej lub ukośnej. Następnie informuje nadawcę o wyborach bazy w każdym pomiarze, nie podając wyniku pomiaru. Nadawca wskazuje, które ustawienia analizatorów były prawidłowe. Dla prawidłowych pomiarów odbiorca przypisuje otrzymanym polaryzacjom wartości 0 i 1, które stanowią klucz kryptograficzny. Ponieważ pomiar stanu kubitów powoduje zmianę jego stanu, nie

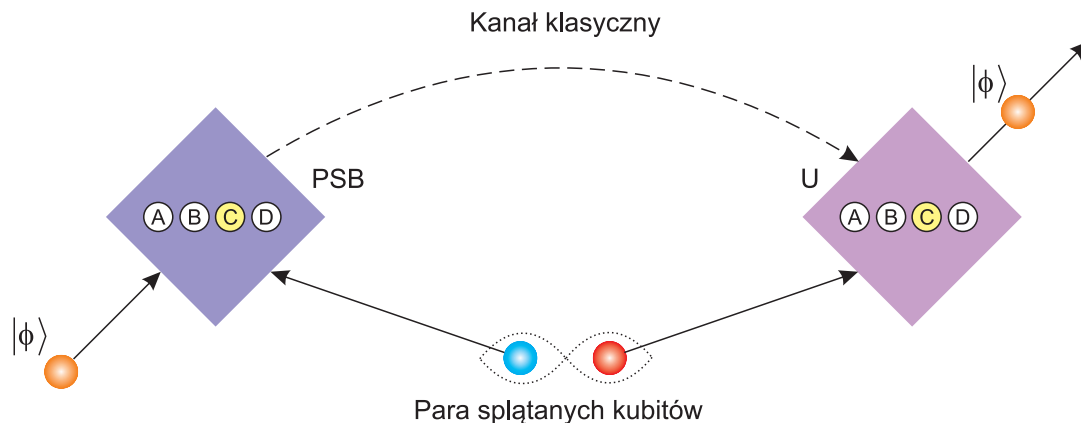


Rysunek 1.2. Stany  $|1\rangle$  i  $|0\rangle$  w bazie prostej i ukośnej.



jest możliwe pasywne podsłuchiwanie przesyłanego klucza. Nie jest możliwe również klonowanie nieznanego stanu kwantowego [36, 37]. Chcąc podsłuchać transmisję należałoby w pierwszej kolejności odebrać i zmierzyć polaryzację fotonu wysłanego przez nadawcę, a następnie przesłać foton spolaryzowany zgodnie z pomiarem do odbiorcy. Ponieważ nie wiadomo w jakiej bazie należy ustawić analizator, istnieje możliwość, że polaryzacja przesyłanego fotonu będzie się różniła od fotonu, który został odebrany od nadawcy. Dokonując pomiaru fotonu spolaryzowanego np. pionowo w bazie ukośnej z równym prawdopodobieństwem otrzymamy wynik 0 i 1. W rezultacie odbiorca, używając poprawnej bazy, może odebrać inny bit, niż wysłany przez nadawcę. Porównanie losowo wybranych bitów z uzgodnionego klucza pozwala na sprawdzenie, czy przekaz był podsłuchiwany. Prototypowe urządzenie korzystające z algorytmu Bennetta-Brassarda zostało skonstruowane w 1989 roku przez naukowców z IBM. Pozwalało ono na przesyłanie fotonów na odległość 32 cm, z prędkością transmisji 10 bit/s. W 2008 roku udało się eksperymentalnie zademonstrować przesyłanie klucza kryptograficznego z prędkością 1 Mbit/s, poprzez światłowód o długości 20 km, oraz z prędkością 10 kbit/s, przy użyciu światłowodu o długości 100 km [38]. Ponieważ każdy pomiar zaburza przekaz, nie ma możliwości zastosowania przekazników, w celu zwiększenia odległości. Obecny rekord w odległości transmisji przy użyciu światłowodu wynosi 148.7 km [39]. Co istotne, odległość ta jest większa, niż odległość między większością węzłów obecnej sieci światłowodowej.

Zaproponowana w 1993 roku przez Charlesa Bennetta technika teleportacji kwantowej [40], pozwala na przeniesienie stanu kwantowego na dowolnie dużą odległość, z wykorzystaniem stanu splątanego. Protokół teleportacji kwantowej polega na wytworzeniu pary splątanych kubitów i wysłaniu po jednym splątanym kubicie do miejsca startowego i docelowego teleportacji. W miejscu startu wykonuje się pomiar stanu Bella (PSB) na splątanym kubicie oraz kubicie, który ma zostać teleportowany. Otrzymany wynik pomiaru przesyłany jest klasycznym kanałem informacji do miejsca docelowego. Na podstawie przesłanej informacji za pomocą operacji unitarnych modyfikuje się drugi kubit ze splątanej pary, w wyniku czego otrzymujemy kubit w stanie identycznym, jak kubit przygotowany do teleportacji (Rysunek 1.3). Rekord teleportacji kwantowej został ustanowiony w maju 2012 roku, kiedy dokonano teleportacji fotonu na odległość 143 km pomiędzy dwoma Wyspami Kanaryjskimi - La Palmą i Teneryfą [41]. Kolejnym wyzwaniem jest teleportacja z powierzchni Ziemi na pokład Międzynarodowej Stacji Kosmicznej (odległość ok. 400 km). Zapoczątkuje to budowę globalnej sieci kwantowej opartej na satelitach.



Rysunek 1.3. Protokół teleportacji kwantowej. Wytworzona para splątanych kubitów zostaje rozdzielona, jeden kubit wysyłany jest do miejsca startowego i docelowego teleportacji. W miejscu startu wykonuje się pomiar stanu Bella (PSB) na splątanym kubicie oraz kubicie, który ma zostać teleportowany. Otrzymany wynik pomiaru przesyłany jest klasycznym kanałem informacji do miejsca docelowego. Na podstawie przesłanej informacji za pomocą operacji unitarnych modyfikuje się drugi kubit ze splątanej pary, w wyniku czego otrzymujemy kubit w stanie identycznym, jak kubit przygotowany do teleportacji.

Innym ciekawym eksperymentem był opublikowany w 2013 roku przez J. Yin *i inni* [42] pomiar prędkości „oddziaływania” między splątanymi kubitami. Doświadczenie polegało na wytworzeniu pary splątanych fotonów, które następnie rozdzielono i przesłano do oddalonych od siebie o 15.3 km punktów pomiarowych. Pomiaru polaryzacji fotonów, wskazujących na korelacje kwantowe, dokonywano w tym samym czasie, z dokładnością do 0.35 ns. Oznacza to, że gdyby pomiędzy fotonami następowała wymiana informacji, musiałaby ona zachodzić z prędkością przynajmniej 10 000 razy większą od prędkości światła. Wynik tego eksperymentu wskazuje na nielokalny charakter mechaniki kwantowej. Albert Einstein zjawisko natychmiastowego oddziaływania splątanych cząstek nazwał „upiornym działaniem na odległość”.

## Rozdział 2

# Nadprzewodnik - źródło splątanych elektronów

Przedstawione w poprzednim rozdziale eksperymentalne realizacje kubitów i algorytmów kwantowych opierały się w dużej mierze na splątanych fotonach, które można wytworzyć np. za pomocą parametrycznego dzielnika częstości, takiego jak kryształ beta boranu baru. Zastosowanie fotonów pozwala na względnie łatwe przeprowadzanie na nich operacji i realizację algorytmów kwantowych, lecz nie pozwala na długie przechowywanie informacji, ze względu na wrażliwość fotonów na oddziaływania z otoczeniem. Z punktu widzenia budowy przyszłych komputerów kwantowych, użyteczna byłaby możliwość wytwarzania stanu splątanego w ciele stałym. Jedną z możliwości jest zastosowanie nadprzewodnika, jako naturalnego źródła elektronów w stanie splątanym. W rozdziale tym zostaną omówione podstawowe modele nadprzewodnictwa oraz metody uzyskania przestrzennie rozdzielonych splątanych elektronów wykorzystujące efekt nadprzewodnictwa, które mogą być użyte jako mobilne kubity.

### 2.1. Teoria BCS

Zjawisko nadprzewodnictwa zostało odkryte w 1911 roku przez Heike Kamerlingha Onnesa [43]. Nadprzewodniki to materiały, które w określonych warunkach (poniżej pewnej temperatury krytycznej  $T_c$  właściwej dla danego materiału) wykazują dwie charakterystyczne cechy. Pierwszą z nich jest zanik opór elektrycznego do wielkości niemierzalnie małej, a drugą jest wypychanie strumienia magnetycznego z całej objętości nadprzewodnika (efekt Meissnera-Ochsenfelda). Nadprzewodnictwo jest efektem kwantowym, którego nie można wyjaśnić na gruncie fizyki klasycznej. Teoria BCS była pierwszą mikroskopową teorią opisującą nadprzewodnictwo, od czasu odkrycia tego zjawiska. Została zaproponowana w 1957 roku przez Johna Bardeena, Leona Coopera i Roberta Schrieffera [44]. Teoria ta w sposób zadowalający opisuje jedynie nadprzewodniki klasyczne (niskotemperaturowe).

U podstaw teorii BCS leży założenie, że wraz ze zmniejszaniem temperatury w niektórych metalach nośniki ładunku (fermiony) w pewnej odpowiednio niskiej krytycznej temperaturze  $T_c$  łączą się za pośrednictwem fononów w pary (pary Coopera), mające cechy bozonów i tworzą kondensat. Podczas ruchu kondensat par Coopera nie ulega rozproszeniom, zatem prąd, którego nośnikami są pary elektronów, płynie bez oporu. Mechanizm łączenia elektronów w pary i zanik oporu elektrycznego można jakościowo (nieprecyzyjnie) opisać za pomocą ruchu elektronu w sieci krystalicznej. Poruszający się elektron odkształca dodatnio naładowaną sieć rdzeni atomowych. Odkształcenie sieci wywołuje lokalny wzrost gęstości dodatniego ładunku rdzeni atomowych, co z kolei powoduje przyciąganie drugiego elektronu. Jeżeli elektron, rozpraszając się na sieci krystalicznej, wzbudzi fonon, to wzbudzony fonon może przekazać swój pęd do drugiego elektronu. W wyniku tego procesu, pomimo, że doszło do rozproszenia elektronu na fononie (co w normalnych metalach odpowiada za opór elektryczny), wypadkowy pęd pary elektronów nie ulegnie zmianie, a zatem materiał nie będzie wykazywał oporu elektrycznego [45].

W teorii BCS rozważamy pary stanów elektronowych, w których jeden elektron ma spin skierowany w górę oraz wektor falowy  $\mathbf{k}$ , a drugi elektron ma spin przeciwny i wektor falowy  $-\mathbf{k}$ . Stan podstawowy układu opisany jest za pomocą funkcji falowej:

$$|\psi_G\rangle = \prod_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_M} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger) |\phi_0\rangle, \quad (2.1)$$

gdzie  $|\phi_0\rangle$  oznacza stan próżni,  $u_{\mathbf{k}}$  oznacza amplitudę prawdopodobieństwa, że stan  $(\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow)$  jest pusty, a  $v_{\mathbf{k}}$  oznacza amplitudę prawdopodobieństwa, że stan ten jest obsadzony,  $c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger$  i  $c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger$  oznaczają odpowiednio operatory kreacji elektronu o wektorze falowym  $\mathbf{k}$  i spinem  $\uparrow$  oraz o wektorze  $-\mathbf{k}$  i spinie  $\downarrow$ . Amplitudy muszą spełniać warunek normalizacji:

$$u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 = 1. \quad (2.2)$$

Współczynniki  $u_{\mathbf{k}}$  i  $v_{\mathbf{k}}$  można wyznaczyć przy użyciu tzw. hamiltonianu parowania:

$$H = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow}. \quad (2.3)$$

Energia kinetyczna względem poziomu Fermiego, oraz energia potencjalna wynoszą:

$$E_{kin} = 2 \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2, \quad (2.4)$$

$$E_{pot} = - \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} , \quad (2.5)$$

gdzie  $\xi_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}} - \mu$  jest energią mierzona względem poziomu Fermiego. Obliczając minimum energii całkowitej oraz definiując wielkości:

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2} , \quad (2.6)$$

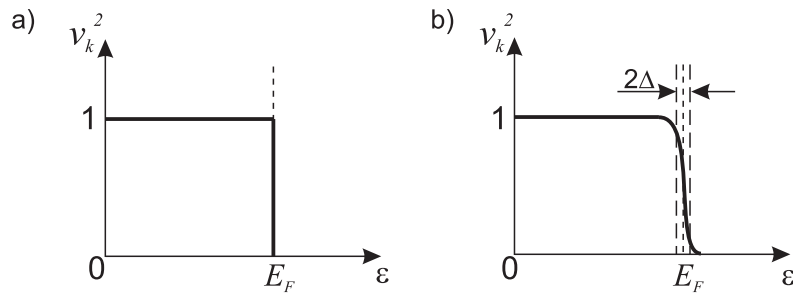
$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} , \quad (2.7)$$

otrzymujemy:

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) , \quad (2.8)$$

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) . \quad (2.9)$$

Rysunek 2.1 przedstawia zależność współczynnika  $v_{\mathbf{k}}^2$  (2.8) od energii. W metalu normalnym, w temperaturze  $T \rightarrow 0$ , obsadzone są wyłącznie stany o energii mniejszej od energii Fermiego. W stanie nadprzewodzącym energia elektronu związanego w parę z innym elektronem jest mniejsza niż wynikałoby to z pędu obowiązującego dla elektronów swobodnych. Elektron może znajdować się zarówno w pobliżu „fononowego” zagęszczenia ładunków dodatnich powodującego obniżenie jego energii i utworzenie pary, jak również może się znaleźć w pobliżu rozrzedzenia ładunku dodatniego, co podwyższy jego energię [45].



Rysunek 2.1. Prawdopodobieństwo obsadzenia stanów  $\mathbf{k}$  w temperaturze  $T = 0$ : a) w stanie normalnym, b) w stanie nadprzewodzącym.

W modelu BCS wielkości  $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  i  $\Delta_{\mathbf{k}}$  spełniają relacje:

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V \Leftrightarrow |\xi_{\mathbf{k}}|, |\xi_{\mathbf{k}'}| \leq \hbar\omega_c \\ 0 \Leftrightarrow |\xi_{\mathbf{k}}|, |\xi_{\mathbf{k}'}| > \hbar\omega_c , \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \Delta \Leftrightarrow |\xi_{\mathbf{k}}| < \hbar\omega_c \\ 0 \Leftrightarrow |\xi_{\mathbf{k}}| > \hbar\omega_c, \end{cases} \quad (2.11)$$

Wielkość  $\Delta$  jest podstawowym parametrem wprowadzonym przez Bardeena, Coopera i Schrieffera, nazywanym parametrem przerwy energetycznej lub parametrem porządku.

Zależność parametru  $\Delta$  od temperatury wyraża się formułą [46]:

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = 1.74 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2}. \quad (2.12)$$

Parametr  $\Delta$  spełnia również relację:

$$\frac{2\Delta(0)}{k_B T_c} = 3.52. \quad (2.13)$$

Stan wzbudzony związany jest z rozrywaniem par Coopera, któremu odpowiada zmiana energii:

$$\Delta E_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2} + \sqrt{\xi_{\mathbf{k}'}^2 + \Delta^2} \geq 2\Delta. \quad (2.14)$$

Minimalna energia potrzebna do rozerwania pary Coopera jest równa  $2\Delta$ . W nadprzewodniku gęstość wzbudzeń wynosi [44]:

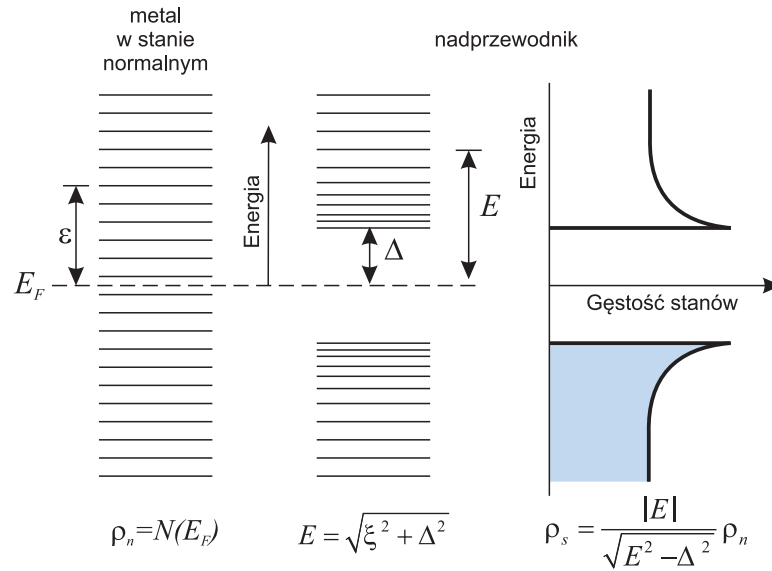
$$N(E) = \begin{cases} 0, & |E| < \Delta, \\ N(E_F) |E| / \sqrt{E^2 - \Delta^2}, & |E| > \Delta. \end{cases} \quad (2.15)$$

W stanie nadprzewodzącym wzbudzenia wzbronione dla  $|E| < \Delta$  koncentrują się dla  $|E| > \Delta$ , w wyniku czego otrzymamy osobliwość gęstości stanów w pobliżu przerwy wzbronionej (Rysunek 2.2) [47].

Teoria BCS zakłada parowanie elektronów o przeciwnych spinach. Stan takiej pary jest stanem singletowym lub trypletowym niemagnetycznym:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle \mp |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (2.16)$$

Stan ten jest stanem maksymalnie splątany, zatem część nadprzewodników zawiera naturalnie splątane pary elektronów, a ściślej mówiąc pary elektronów, w których spiny są w stanie splątany. Oprócz parowania singletowego możliwe jest również występowanie nadprzewodnictwa w układach, w których pary Coopera mają spiny ustawione równo-



Rysunek 2.2. Porównanie gęstości stanów w metalu normalnym i nadprzewodniku. W stanie nadprzewodzącym wzbudzenia wzbronione dla  $|E| < \Delta$  koncentrują się dla  $|E| > \Delta$ , w wyniku czego otrzymamy osobliwość gęstości stanów w pobliżu przerwy wzbronionej.

legle (parowanie trypletowe magnetyczne). Wówczas stan par Coopera nie jest stanem splątany.

## 2.2. Teoria Ginzburga-Landaua

Lew Landau i Witalij Ginzburg opracowali na początku lat pięćdziesiątych XX wieku fenomenologiczną teorię nadprzewodnictwa [48], która opiera się na następujących obserwacjach:

1. Przejście ze stanu normalnego do stanu nadprzewodzącego, w nieobecności pola magnetycznego, jest przejściem fazowym drugiego rodzaju. Można znaleźć dla tego przejścia parametr porządku, który przyjmuje wartość zerową w fazie nieuporządkowanej i wartość niezerową w fazie uporządkowanej. Parametr ten musi dążyć do zera w sposób ciągły.
2. Stan nadprzewodzący jest niszczone przez zewnętrzne pole magnetyczne, zatem parametr porządku może zależeć od natężenia pola magnetycznego.
3. Pole magnetyczne wnika do próbki na pewną głębokość  $\lambda$ , co może mieć wpływ na wartość parametru porządku w warstwie przypowierzchniowej.

Ginzburg i Landau zaproponowali parametr porządku w postaci liczby zespolonej:

$$\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})| e^{i\vartheta(\mathbf{r})} = \sqrt{\tilde{n}_s(\mathbf{r})} e^{i\vartheta(\mathbf{r})}, \quad (2.17)$$

gdzie  $\tilde{n}_s$  oznacza gęstość nadprzewodzących nośników prądu, a  $\vartheta(\mathbf{r})$  oznacza zmienną w przestrzeni fazę. Gradient fazy parametru porządku zawiera informację o ruchu nośników nadprzewodzących. Minimalizując energię swobodną Helmholtza względem parametru porządku  $\psi(\mathbf{r})$  oraz potencjału wektorowego  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  otrzymuje się dwa równania Ginzburga-Landaua [45] określające parametr porządku oraz prąd nadprzewodzący płynący w nadprzewodniku:

$$\left[ \frac{1}{2m^*} (-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 + a(T - T_c) + 2b|\psi(\mathbf{r})|^2 \right] \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{j} = -\frac{iq\hbar}{2m^*} (\psi(\mathbf{r})^* \nabla \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r})^*) - \frac{q^2}{m^*} |\psi(\mathbf{r})|^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (2.19)$$

gdzie  $a$  i  $b$  są fenomenologicznymi parametrami określonymi przez dopasowanie wyników eksperymentalnych do teorii Ginzburga-Landau. Powyższego układu równań nie można rozwiązać analitycznie dla przypadku ogólnego. Teoria Ginzburga-Landaua nie tłumaczy zjawiska nadprzewodnictwa na poziomie mikroskopowym, ale rozwiązując układ równań dla przypadków szczególnych otrzymamy związek pomiędzy mikroskopowymi (długość koherencji, głębokość wnikania) a makroskopowymi parametrami (poła krytyczne) opisującymi nadprzewodnik. Dwoma ważnymi relacjami otrzymanymi z tej teorii są zależności głębokości wnikania oraz długości koherencji od temperatury  $\lambda(T)$  i  $\xi(T)$ .

Długość koherencji określa charakterystyczną odległość, w jakiej wystąpią zmiany parametru porządku, gdy wprowadzimy zaburzenie w jakimś punkcie. Wielkość ta jest też interpretowana jako średni rozmiar par Coopera. Stosunek głębokości wnikania i długości koherencji, nazywany parametrem Ginzburga-Landaua, pozwala na określenie czy nadprzewodnik jest I czy II rodzaju. Podział na nadprzewodniki I i II rodzaju oznacza podział ze względu na sposób reakcji nadprzewodnika na przyłożenie zewnętrznego pola magnetycznego [46]. Parametr ten jest zdefiniowany następująco:

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} = \frac{m_e}{e\hbar} \sqrt{\frac{4b}{\mu_0}}. \quad (2.20)$$

Materiały, dla których  $\kappa < 1/\sqrt{2}$ , są nadprzewodnikami I rodzaju. Dla tych nadprzewodników  $\lambda \ll \xi$ . W nadprzewodnikach II rodzaju parametr  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  oraz  $\lambda \gg \xi$ .

Długość koherencji i głębokość wnikania otrzymane z teorii Ginzburga-Landaua można wyprowadzić z teorii BCS, co pokazał L. P. Gor'kov [49]. Można pokazać związek wielkości fizycznych, zależnych od fenomenologicznych współczynników Ginzburga-Landaua,



z wielkościami, którymi operuje teoria BCS [50]. Teoria mikroskopowa wprowadziła tzw. BCS-owską długość koherencji  $\xi_0$ :

$$\xi_0 = 0.18 \frac{\hbar v_F}{k_B T_c}, \quad (2.21)$$

która dla większości metali jest rzędu  $\sim 1800\text{\AA}$ . Wielkość ta jest związana z zależną od temperatury długością koherencji  $\xi(T)$  poprzez drogę swobodną elektronów  $l_e$ . Dla materiałów „czystych”, gdzie  $\xi_0 \ll l_e$ , mamy [50]:

$$\xi(T) = 0.74 \xi_0 \left( \frac{T_c}{T_c - T} \right)^{1/2}, \quad (2.22)$$

a w przeciwnym przypadku granicznym,  $\xi_0 \gg l_e$ :

$$\xi(T) = 0.85 \sqrt{\xi_0 l_e} \left( \frac{T_c}{T_c - T} \right)^{1/2}. \quad (2.23)$$

Dodawanie do nadprzewodnika jakiegoś niemagnetycznego składnika z reguły nie zmienia istotnie wartości  $T_c$  i  $v_F$ , zatem wartość  $\xi_0$  słabo zależy od domieszkowania. Domieszkowanie wpływa jednak na drogę swobodną elektronów, zatem zmniejszamy w ten sposób długość koherencji Ginzburga-Landaua  $\xi(T)$ .

Głębokość wnikania w teorii Ginzburga-Landaua dla przypadku czystego wynosi [50]:

$$\lambda(T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_L \left( \frac{T_c}{T_c - T} \right)^{1/2}, \quad (2.24)$$

dla przypadku „brudnego”:

$$\lambda(T) = 0.64 \lambda_L \sqrt{\frac{\xi_0}{l_e}} \left( \frac{T_c}{T_c - T} \right)^{1/2}, \quad (2.25)$$

gdzie  $\lambda_L$  oznacza londonowską głębokość wnikania:

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m_e}{\mu_0 n_s e^2}}, \quad (2.26)$$

a  $n_s$  oznacza liczbę elektronów nadprzewodzących.

Odwrotnie do długości koherencji przy silnym domieszkowaniu głębokość wnikania rośnie. Parametr Ginzburga-Landaua  $\kappa$  dla przypadku „czystego” i „brudnego” wynosi

odpowiednio:

$$\kappa = 0.96 \frac{\lambda_L}{\xi_0}, \quad (2.27)$$

oraz

$$\kappa = 0.715 \frac{\lambda_L}{l_e}. \quad (2.28)$$

Parametr ten rośnie, gdy droga swobodna elektronów maleje, zatem można otrzymać nadprzewodnik II rodzaju, za pomocą domieszkowania nadprzewodnika I rodzaju.

## 2.3. Mechanizm rozdzielania par Coopera

Do stosowania algorytmów kwantowych konieczne jest wykonywanie operacji na pojedynczym kubicie. W związku z tym należy opracować metodę na „wyciągnięcie” z nadprzewodnika i rozdzielanie przestrzenne par splątanych kubitów (par Coopera w stanie singletowym). Operacji wyizolowania z nadprzewodnika par Coopera możemy dokonać dzięki efektowi bliskości.

### 2.3.1. Efekt bliskości

Rozpatrzmy złącze nadprzewodnika z metalem normalnym. Teoria Ginzburga-Landaua wprowadziła parametr porządku, który w metalu ma wartość zero, a w nadprzewodniku ma wartość niezerową. Parametr ten nie może zmieniać się skokowo na granicy metal-nadprzewodnik. Zmiany parametru porządku zachodzą na odległości rzędu długości koherencji w metalu normalnym  $\xi_N$  (Rysunek 2.3), która zależy od jakości kontaktu i drogi swobodnej elektronów w metalu ( $l_e$ ). Jeżeli długość koherencji w nadprzewodniku jest dużo mniejsza niż droga swobodna w metalu ( $\xi_0 \ll l_e$ ),  $\xi_N$  dane jest równaniem:

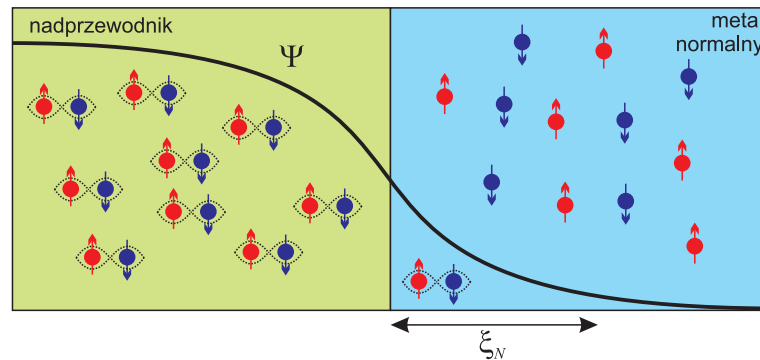
$$\xi_N = \frac{\hbar v_F}{k_B T}, \quad (2.29)$$

gdzie  $v_F$  oznacza prędkość elektronów na poziomie Fermiego. W przypadku „brudnym” ( $\xi_0 \gg l_e$ ) długość koherencji w metalu normalnym wyraża się wzorem:

$$\xi_N = \sqrt{\frac{\hbar v_F l_e}{6\pi k_B T}}. \quad (2.30)$$

Długość koherencji  $\xi_N$  określa obszar na jakim indukowane jest nadprzewodnictwo w metalu normalnym, a zatem istnieje niezerowe prawdopodobieństwo znalezienia pary Coopera w obszarze metalu normalnego [45]. Dzięki efektowi bliskości możemy mówić o wstrzy-

kiwaniu par Coopera do różnych układów, zakładając, że zachowają one swój stan - pozostaną w stanie splątanym.

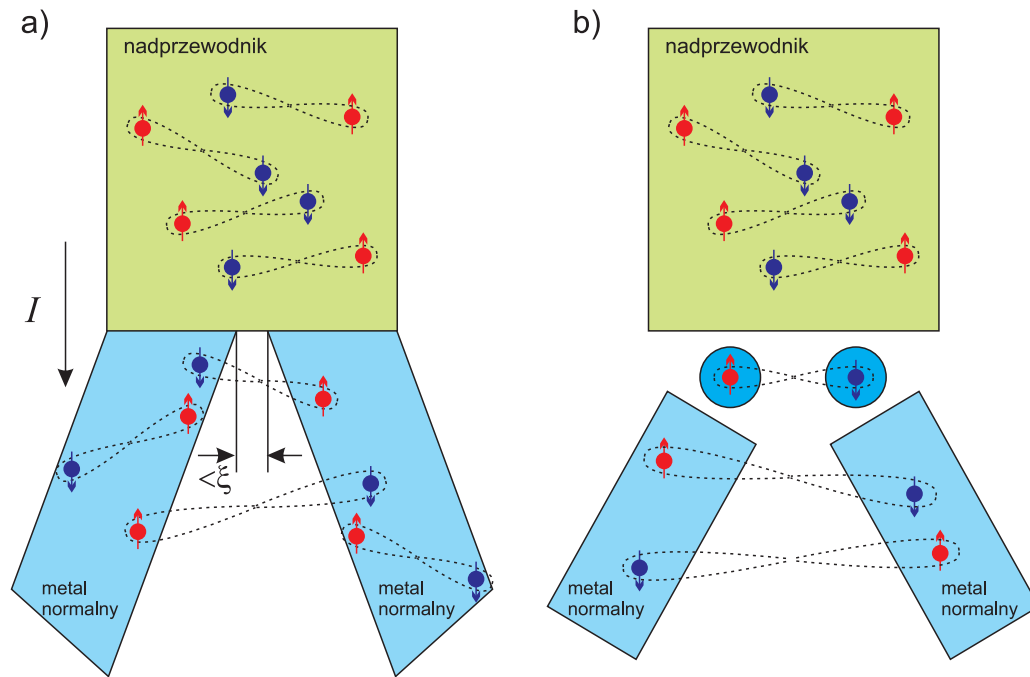


Rysunek 2.3. Zmiana parametru porządku na granicy nadprzewodnik - metal normalny. Parametr porządku w metalu ma wartość zero, a w nadprzewodniku ma wartość niezerową. Parametr ten może zmieniać się skokowo na granicy metal-nadprzewodnik. Zmiany parametru porządku zachodzą na odległości rzędu długości koherencji w metalu normalnym  $\xi_N$ .

### 2.3.2. Kropki kwantowe

Efekt bliskości pozwala na „wyciągnięcie” par Coopera z nadprzewodnika, jednak samo połączenie nadprzewodnika z metalem normalnym nie pozwoli na rozdzielenie pary. Zamiast jednego złącza metal-nadprzewodnik możemy zastosować połączenie nadprzewodnika z dwoma normalnymi elektrodami metalowymi, będącymi w odległości mniejszej od długości koherencji, czyli mniejszej niż rozmiar pary Coopera. Wówczas pary Coopera w sposób naturalny mogą zostać rozdzielone, lecz sprawność takiego rozdzielania nie będzie większa niż 50%, co wynika z jednakowej liczby dozwolonych, równoprawdopodobnych procesów rozdzielających i nierozdzielających parę Coopera, (Rysunek 2.4(a)). Sposobem na zwiększenie sprawności rozdzielania jest zastosowanie kropek kwantowych, gdzie silne oddziaływanie kulombowskie uniemożliwia obsadzenie pojedynczej kropki kwantowej przez dwa elektrony i wymusza w ten sposób procesy, które rozdzielają parę Coopera.

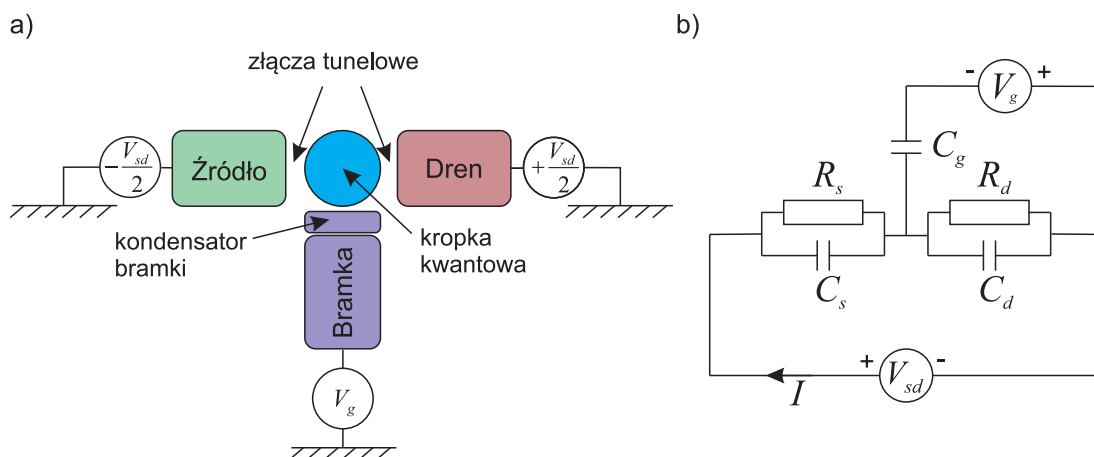
Kropkami kwantowymi nazywamy układy, w których wszystkie trzy wymiary przestrzenne są porównywalne z długością fali Fermiego elektronów [51]. Istnieje wiele metod wytwarzania kropek kwantowych, takich jak nanolitografia w cienkich warstwach, wykorzystanie nanokryształów, pojedynczych molekuł, nanorurek [52, 53, 54, 55]. Ograniczenie wymiarów kropki prowadzi do kwantyzacji ładunkowej oraz dyskretyzacji poziomów energetycznych. Kropka kwantowa może być połączona z elektrodami, będącymi źródłem nośników ładunku elektrycznego, za pomocą złącz tunelowych (Rysunek 2.5(a)). Przyłożenie napięcia  $V_{sd}$  między dwoma elektrodami, źródłem i drenem, powoduje przepływ



Rysunek 2.4. Rozdzielanie par Coopera: a) połączenie elektrody nadprzewodzącej z dwoma elektrodami normalnymi, b) układ z podwójną kropką kwantową. Dzięki silnym oddziaływaniom kulombowskim na kropkach kwantowych wymuszane są procesy, które rozdzielają parę Coopera.

prądu przez kropkę. Za pomocą napięcia bramki  $V_g$  można elektrostatycznie wpływać na położenie poziomów energetycznych kropki kwantowej względem poziomu Fermiego elektrod.

Układ kropki kwantowej z elektrodami można zobrazować za pomocą układu kondensatorów pokazanego na Rysunku 2.5(b). Całkowita pojemność układu  $C$  jest równa sumie



Rysunek 2.5. Schemat: a) kropki kwantowej połączonej przez złącza tunelowe z elektrodami źródła i drenu. Za pomocą napięcia na bramce możemy sterować położeniem poziomów energetycznych kropki. b) zastępczego układu elektrycznego. Napięcie polaryzacji (transportowe)

$$V_{sd} = V_s - V_d.$$

pojemności barier,  $C_s$  i  $C_d$  oraz pojemności między kropką a bramką,  $C_g$ ,  $C = C_s + C_d + C_g$ .

Energia ładowania układu zależy od liczby (całkowitej) elektronów  $n$  na kropce oraz od przyłożonych napięć polaryzacji oraz bramki i wynosi:

$$E_{ch}(n, Q_g) = \frac{(ne - Q_g)^2}{2C}, \quad (2.31)$$

gdzie ładunek bramki  $Q_g = C_g V_g + C_s V_s + C_d V_d$ ,  $e$  oznacza ładunek elementarny, a  $V_g$ ,  $V_s$ ,  $V_d$  są napięciami odpowiednio na bramce, źródle i drenie. W procesie tunelowania zwiększającym ładunek kropki z  $n$  do  $n + 1$  elektronów, energia ładowania zmienia się o:

$$E_{ch}(n + 1, Q_g) - E_{ch}(n, Q_g) = \left( n + \frac{1}{2} - \frac{Q_g}{e} \right) \frac{e^2}{C}. \quad (2.32)$$

W niskich temperaturach tunelowanie z elektrody źródła do kropki kwantowej jest możliwe, gdy spełniony jest warunek:

$$eV_s > E_{ch}(n + 1, Q_g) - E_{ch}(n, Q_g). \quad (2.33)$$

Tunelowanie z kropki kwantowej do elektrody drenu wymaga spełnienia warunku:

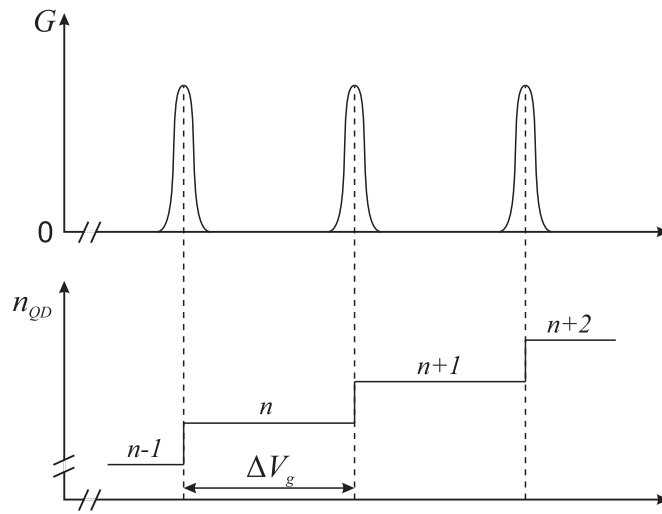
$$E_{ch}(n + 1, Q_g) - E_{ch}(n, Q_g) > eV_d. \quad (2.34)$$

W celu uzyskania ciągłego przepływu elektronów przez układ konieczne jest jednoczesne spełnienie obu powyższych warunków.

W przypadku, gdy  $E_{ch}(n + 1, Q_g) - E_{ch}(n, Q_g) < eV_s, eV_d$  mamy do czynienia z blokadą kulombowską, w zakresie której kolejny elektron nie może tunelować z elektrody na kropkę kwantową, jak również elektron przebywający na kropce nie może tunelować z kropki na żadną elektrodę. Za pomocą napięcia na bramce  $V_g$  możemy dostroić położenie  $E_{ch}(n + 1, Q_g) - E_{ch}(n, Q_g)$  do obszaru okna transportowego i w ten sposób odblokować układ, umożliwiając tunelowanie elektronu z elektrody źródła na kropkę kwantową i dalej na elektrodę drenu. Zmieniając napięcie  $V_g$  obserwujemy pojawianie się maksimów liniowej konduktancji ( $eV_{sd} < k_B T$ ,  $V_{sd} = V_s - V_d$ ) dla wartości rezonansowych, gdy transport elektronów przez kropkę jest możliwy, oraz zerową wartość konduktancji w obszarach blokady kulombowskiej. Maksima konduktancji mają pewną szerokość wynikającą z poszerzenia poziomów energetycznych kropki związanego ze sprzężenia kropki z elektrodami (Rysunek 2.6).

W zależności od temperatury, możemy wyróżnić trzy obszary, w których transport elektronów przez kropkę kwantową zachodzi w odmienny sposób:

1.  $e^2/2C \ll k_B T$ , w obszarze tym dyskretyzacja ładunku przestaje być istotna,
2.  $\Delta E \ll k_B T \ll e^2/2C$ , zakres klasycznej (metalicznej) blokady kulombowskiej, w której wiele poziomów jest wzbudzonych termicznie, gdzie  $\Delta E$  oznacza różnicę energii stanów jednocząstkowych.
3.  $k_B T \ll \Delta E < e^2/2C$ , zakres kwantowej blokady kulombowskiej, w której pojedynczy poziom kropki kwantowej uczestniczy w transporcie elektronów.



Rysunek 2.6. Porównanie przewodnictwa (konduktancji) i liczby elektronów na kropce kwantowej  $n_{QD}$  w funkcji napięcia bramki  $V_g$ .

Kropki kwantowe, w których pojedynczy poziom uczestniczy w transporcie elektronów, można opisać za pomocą tzw. modelu Andersona dla kropek kwantowych. Hamiltonian pojedynczej kropki ma postać:

$$H_{QD} = \sum_{\sigma} \epsilon_{\sigma} d_{\sigma}^{\dagger} d_{\sigma} + U d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\downarrow}^{\dagger} d_{\downarrow}, \quad (2.35)$$

gdzie  $d_{\sigma}^{\dagger}$  ( $d_{\sigma}$ ) jest operatorem kreacji (anihilacji) elektronu ze spinem  $\sigma$  na kropce kwantowej. Pierwszy człon hamiltonianu opisuje pojedynczy poziom kropki kwantowej. Drugi człon opisuje energię oddziaływania kulombowskiego dwóch elektronów, o przeciwnych spinach, zajmujących kropkę kwantową,  $U \sim e^2/C$ . Wartość  $\epsilon_{\sigma}$  możemy efektywnie zmieniać poprzez napięcie bramki  $V_g$ .

## 2.4. Transport w układzie podwójnej kropki kwantowej

Dzięki kropkom kwantowym umieszczonym między elektrodą nadprzewodzącą a elektrodami normalnymi możemy zwiększyć sprawność rozdzielania par Coopera. Kropka kwantowa musi charakteryzować się dostępnością tylko jednego poziomu w obszarze okna transportowego. Wykorzystując silne oddziaływania kulombowskie, czyli brak możliwości przebywania jednocześnie dwóch elektronów na kropce, można spowodować, że para Coopera będzie preferować tunelowanie w sposób rozdzielony (Rysunek 2.4(b)).

W 2001 roku została opublikowana praca autorstwa P. Rechera, E. V. Sukhorukova i D. Lossa [56] opisująca transport w omawianym układzie podwójnej kropki kwantowej. Przedmiotem zainteresowania autorów był transport w zakresie energii:

$$\Delta, U, \Delta\epsilon > eV_{SN} > \Gamma_{N\alpha}, k_B T, \quad (2.36)$$

$$\Gamma_{N\alpha} > \Gamma_S, \quad (2.37)$$

gdzie  $\Delta\epsilon$  jest odległością między poziomami kropek kwantowych, napięcie transportowe pomiędzy elektrodą nadprzewodzącą a symetrycznie przyłożonym napięciem do elektrod normalnych wynosi  $V_{SN} = V_S - V_N > 0$ ,  $\Gamma_{N\alpha} = 2\pi N_\alpha |t_{N\alpha}|^2$  (indeks  $S$  oznacza elektrodę nadprzewodzącą,  $N$  elektrodę normalną,  $\alpha = 1, 2$  indeks elektrody normalnej),  $N_\alpha$  jest gęstością stanów w elektrodzie  $\alpha$ ,  $\Gamma_S = \Gamma_{S1} = \Gamma_{S2} = 2\pi N_S |t_{SD}|^2$ ,  $t_{DN}$  i  $t_{SD}$  są amplitudami tunelowania elektronów między kropką kwantową a elektrodami normalnymi oraz elektrodą nadprzewodzącą. Obliczenia prądu zostały wykonane za pomocą złotej reguły Fermiego, gdzie autorzy brali pod uwagę procesy wszystkich rzędów, zakładając brak oddziaływań w układzie. Autorzy pracy przedstawili wyrażenie na prąd płynący w układzie w sposób rozdzielony (para Coopera tuneluje do różnych elektrod):

$$I_1 = \frac{e\Gamma_S^2\Gamma_N}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 + \Gamma^2/4} \left[ \frac{\sin(k_F\delta r)}{k_F\delta r} \right]^2 \exp\left(-\frac{2\delta r}{\pi\xi}\right), \quad (2.38)$$

gdzie  $\Gamma_N = \Gamma_{N1} + \Gamma_{N2}$ ,  $\xi$  jest długością koherencji par Coopera,  $\delta r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  określa odległość pomiędzy punktami w nadprzewodniku, z których elektrony 1 i 2 tunelują na kropki kwantowe. Prąd ten zanika wykładniczo wraz ze wzrostem odległości  $\delta r$  w porównaniu do długości koherencji  $\xi$ . Zatem, aby uzyskać prąd płynący w sposób rozdzielony, odległość między punktami z których tunelują elektrony z nadprzewodnika, odpowiadająca odległości pomiędzy kropkami kwantowymi, musi być mniejsza od długości koherencji

par Coopera. Prąd rozdzielony  $I_1$  (2.38) osiąga maksymalną wartość, gdy  $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ :

$$I_1 = \frac{4e\Gamma_S^2}{\Gamma_N} \left[ \frac{\sin(k_F\delta r)}{k_F\delta r} \right]^2 \exp\left(-\frac{2\delta r}{\pi\xi}\right), \quad (2.39)$$

co wskazuje na związek tego prądu ze skorelowanym efektem dwucząstkowym. Dla tunelowania par Coopera poprzez jedną kropkę prąd wyrażony jest przez:

$$I_2 = \frac{2e\Gamma_S^2\Gamma_N}{\mathcal{E}^2}, \quad (2.40)$$

$$\frac{1}{\mathcal{E}} = \frac{1}{\pi\Delta} + \frac{1}{U}. \quad (2.41)$$

Stosunek tych dwóch prądów wynosi:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{2\mathcal{E}^2}{\Gamma^2} \left[ \frac{\sin(k_F\delta r)}{k_F\delta r} \right]^2 \exp\left(-\frac{2\delta r}{\pi\xi}\right), \quad (2.42)$$

z którego wynika, że  $I_1$  dominuje gdy  $\mathcal{E}/\Gamma_N > k_F\delta r$  i  $\delta r < \xi$ . Maksymalną sprawność rozdzielania można uzyskać umieszczając poziomy energetyczne kropki w pobliżu rezonansu  $\epsilon_i \simeq eV_S = 0$ . Zaproponowane przez autorów założenie braku oddziaływań w układzie, wydaje się być nie do końca właściwym przybliżeniem, ze względu na ich istotną rolę w rozdzielaniu par Coopera.

Inną interesującą pracą teoretyczną opisującą transport w analizowanym układzie (Rysunek 2.7(a)) była praca z 2010 roku, której autorami są J. Eldridge, M. G. Pala, M. Governale i J. König [57]. Tematem pracy był nadprzewodzący efekt bliskości w oddziałującym układzie podwójnej kropki kwantowej z elektrodą nadprzewodzącą i dwoma elektrodami normalnymi. W porównaniu do poprzedniej pracy, autorzy ograniczyli obliczenia jedynie do procesów pierwszego rzędu dających wkład do prądu w układzie. Użyty w pracy hamiltonian elektrod  $\alpha = 1, 2, S$  ma postać:

$$H_\alpha = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\alpha\mathbf{k}} c_{\alpha\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\alpha\mathbf{k}\sigma} - \delta_{\alpha,S} \Delta \sum_{\mathbf{k}} (c_{\alpha-\mathbf{k}\downarrow} c_{\alpha\mathbf{k}\uparrow} + h.c.). \quad (2.43)$$

Tunelowanie pomiędzy kropkami kwantowymi a elektrodami normalnymi i nadprzewodzącą zostało opisane za pomocą hamiltonianu tunelowego:

$$H_{TN} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} [t_{N1} c_{1\mathbf{k}\sigma}^\dagger d_{1,\sigma} + t_{N2} c_{2\mathbf{k}\sigma}^\dagger d_{2,\sigma} + h.c.], \quad (2.44)$$



$$H_{TS} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left[ t_{S1} c_{S\mathbf{k}\sigma}^\dagger d_{1,\sigma} + V_{S2} c_{S\mathbf{k}\sigma}^\dagger d_{2,\sigma} + h.c. \right]. \quad (2.45)$$

Dynamika kropek kwantowych może być przedstawiona za pomocą hamiltonianu efektywnego:

$$H_{eff} = H_{ddot} - \sum_{\alpha=1,2} \frac{\Gamma_{S\alpha}}{2} \left( d_{\alpha,\uparrow}^\dagger d_{\alpha,\downarrow}^\dagger + h.c. \right) + \frac{\sqrt{\Gamma_{S1}\Gamma_{S2}}}{2} \left( d_{2,\uparrow}^\dagger d_{1,\downarrow}^\dagger - d_{2,\downarrow}^\dagger d_{1,\uparrow}^\dagger + h.c. \right), \quad (2.46)$$

gdzie:

$$H_{ddot} = \sum_{\alpha=1,2} \left[ \epsilon_\alpha \sum_{\alpha} d_{\alpha,\sigma}^\dagger d_{\alpha,\sigma} + U_\alpha n_{\alpha,\uparrow} n_{\alpha,\downarrow} \right] + U_{ddot} \sum_{\sigma,\sigma'} n_{L,\sigma} n_{R,\sigma'}. \quad (2.47)$$

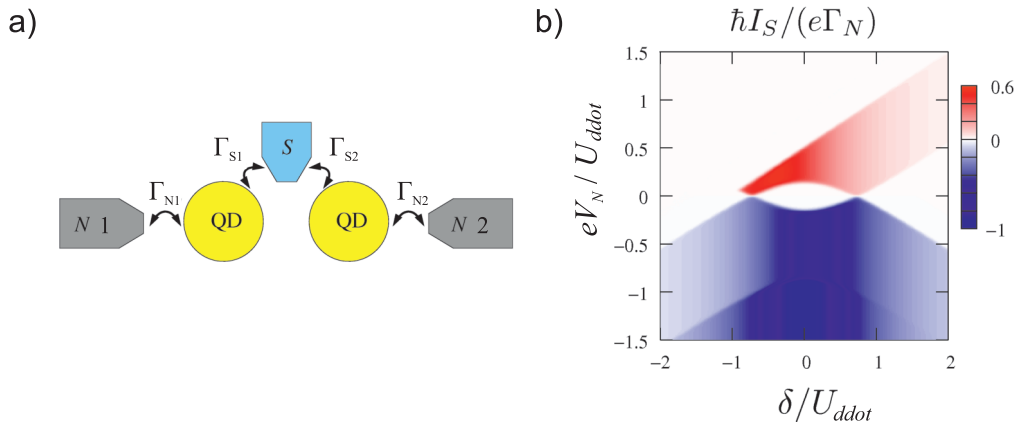
Drugi człon  $H_{eff}$  opisuje lokalny efekt bliskości na każdej kropce powstały w wyniku rozpraszania Andreeva. Człon ten jest zaniedbywalny dla  $U_\alpha \rightarrow \infty$ . Ostatnia część  $H_{eff}$  opisuje korelacje nadprzewodzące pomiędzy kropkami. Rozpatrywany jest przypadek  $\Delta \rightarrow \infty$ ,  $U_\alpha \rightarrow \infty$ . W rezultacie stany własne układu są superpozycją stanów, w których kropki kwantowe są albo puste, albo obsadzone parą elektronów w stanie singletowym:

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \mp \frac{\delta}{2\epsilon_A}} |0\rangle \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \frac{\delta}{2\epsilon_A}} |S\rangle. \quad (2.48)$$

Energie własne wynoszą:  $E_\pm = \delta/2 \pm \epsilon_A$ , gdzie różnica energii  $\delta$  między stanem pustym i singletowym wynosi  $\delta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + U_{ddot}$ . Stany  $|+\rangle$  i  $|-\rangle$  są rozdzielone o  $2\epsilon_A = \sqrt{\delta^2 + 2\Gamma_S^2}$ , gdzie efektywne sprzężenie  $\Gamma_S = \sqrt{\Gamma_{S1}\Gamma_{S2}}$ . Tempa przejść między stanami zostały obliczone korzystając ze złotej reguły Fermiego. Na podstawie równania:

$$I_\alpha = \frac{e}{\hbar} \sum_{\chi \neq \chi'} W_{\chi'\chi}^\alpha P_\chi, \quad (2.49)$$

gdzie  $W_{\chi'\chi}$  jest tempem przejścia ze stanu  $\chi$  do stanu  $\chi'$ ,  $P_\chi$  jest prawdopodobieństwem obsadzenia stanu  $|\chi\rangle$ , otrzymano prąd wstrzykiwany do nadprzewodnika  $I_S = -I_1 - I_2$ , uwzględniając tylko procesy pierwszego rzędu ze względu na  $\Gamma_{N1}$ ,  $\Gamma_{N2}$ , w limicie  $\Gamma_{N1}, \Gamma_{N2} \ll \epsilon_A$ . Rysunek 2.7(b) przedstawia zależność prądu  $I_S$  od napięcia przyłożonego do elektrod normalnych  $eV_N = eV_{N1} = eV_{N2}$  oraz parametru  $\delta$ . Jeżeli znak przyłożonego napięcia polaryzacji jest taki, że para Coopera może opuścić nadprzewodnik, to rozdzielone przez kropki kwantowe elektrony pary mogą przejść do elektrod normalnych. Dla napięcia o przeciwnym znaku dwa elektrony będące w stanie singletowym mogą przejść do nadprzewodnika. Jeżeli jednak elektrony na kropkach kwantowych będą w którymś ze stanów trypletowych, to przejście do nadprzewodnika zostanie zablokowane.



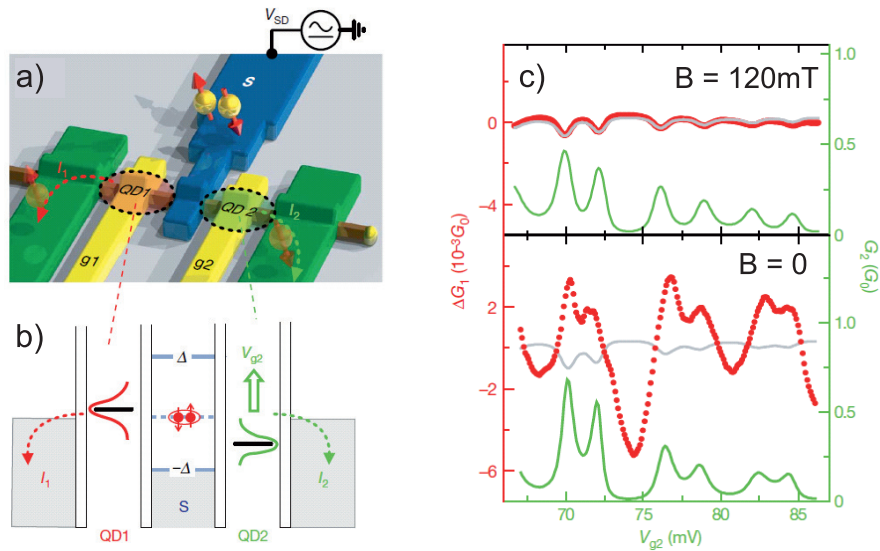
Rysunek 2.7. Układ podwójnej kropki kwantowej: a) schemat układu, b) prąd wstrzykiwany do nadprzewodnika  $I_S = -I_1 - I_2$  w zależności od przyłożonego napięcia do elektrod normalnych  $eV_N$  i różnicy energii pomiędzy stanem pustym i singletowym  $\delta$  dla zdegenerowanych poziomów kropek kwantowych  $\Delta\epsilon = 0$ . Pozostałe parametry:  $\Gamma_S = 0.5U_{ddot}$ ,  $k_B T = 0.01U_{ddot}$  [57].

Mamy wówczas do czynienia z blokadą trypletową, której zakres jest określony przez  $eV_N > (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2 + U = (\delta + U)/2$ . Dla obszaru  $eV_N < 0$  sprawność rozdzielania par Coopera w tym uproszczonym modelu jest równa 100%.

## 2.5. Pomiary eksperymentalne

Jedną z pierwszych prac eksperymentalnych realizujących omawiany układ, była praca z 2009 roku autorstwa L. Hofstettera, S. Csonki, J. Nygård i C. Schönenbergera [8], w której jako źródło par elektronów w stanie splątanym wykorzystano nadprzewodzące aluminium, a do utworzenia kropek kwantowych użyto półprzewodnikowego nanodrudu InAs. Nadprzewodnik charakteryzował się przerwą energetyczną  $\Delta \approx 150\mu eV$ , energia ładowania kropek kwantowych  $U_\alpha \approx 2 - 4meV$ , czyli znacznie większa niż  $\Delta$ . Rozpatrywano dwa układy różniące się sprzężeniem kropek kwantowych z elektrodami, skutkującym poszerzeniem poziomów energetycznych kropek kwantowych odpowiednio o  $\Gamma_{N1} \approx 0.5meV$  i  $\Gamma_{N2} \approx 100\mu eV$ . Głównym wynikiem pracy jest wykazanie możliwości rozdzielania par Coopera poprzez wykonanie nielokalnych charakterystyk prądu płynącego przez układ. W pracy zmierzono zmianę przewodnictwa na pierwszej kropce kwantowej  $\Delta G_1 = G_1 - \langle G_1 \rangle$  w zależności od położenia poziomów energetycznych  $\epsilon_2$  drugiej kropki kwantowej, co wskazuje na nielokalny charakter prądu elektrycznego. Rysunek 2.8(c) przedstawia wynik pomiaru, w którym poziom energetyczny pierwszej kropki kwantowej umieszczono w rezonansie, a za pomocą napięcia  $V_{g2}$  zmieniano położenie poziomów drugiej kropki. W momencie gdy poziomy energetyczne kropki 2 znajdowały się w rezo-

nansie obserwowano pik  $\Delta G_1$ . Odpowiedzialne są za to procesy w których para Coopera ulega rozdzieleniu. W celu sprawdzenia, czy obserwowany efekt ma rzeczywiście związek z nadprzewodnictwem, układ został umieszczony w polu magnetycznym  $B = 120mT$  niszczącym nadprzewodnictwo. Na Rysunku 2.8(c) widać, że przyłożenie pola magnetycznego powoduje zanik efektu wzrostu przewodnictwa. Oszacowana przez autorów sprawność rozdzielania par Coopera wynosiła 2%.

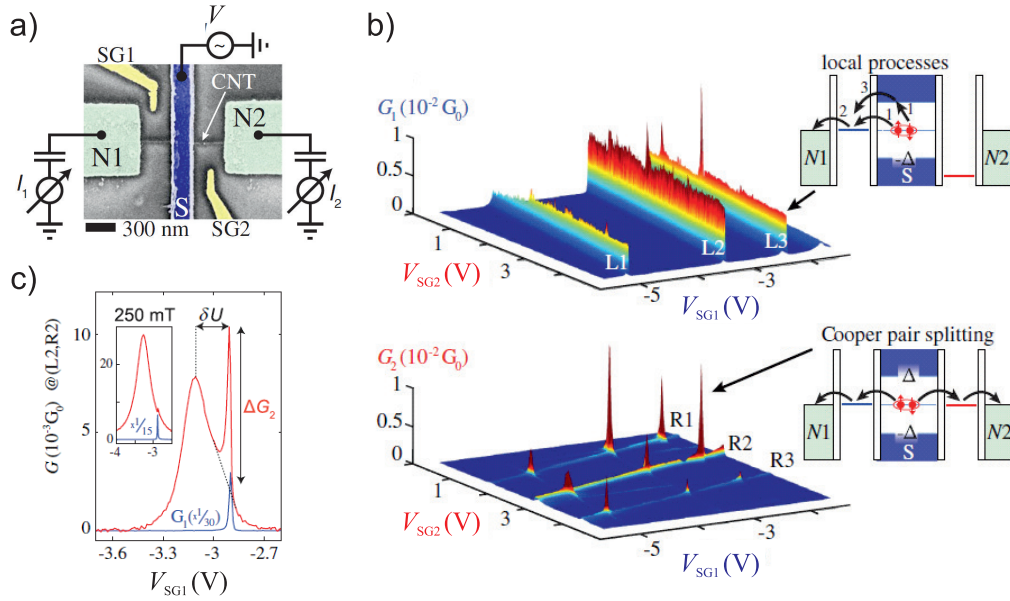


Rysunek 2.8. Eksperymentalny układ podwójnej kropki kwantowej: a) schemat układu - nadprzewodnik aluminium połączony został za pośrednictwem nanodrutu InAs (z wyodrębnionymi kropkami kwantowymi) do elektrod normalnych. Za pomocą elektrod g1 i g2 można sterować położeniem poziomów energetycznych kropek kwantowych. b) nielokalny pomiar przewodnictwa polega na ustawieniu poziomu kropki kwantowej QD1 w położeniu rezonansowym a następnie zmierzeniu wartości  $\Delta G_1$  w zależności od położenie poziomu energetycznego kropki kwantowej QD2, c) jednoczesny pomiar przewodnictwa  $G_2$  kropki QD2 i zmiany przewodnictwa  $\Delta G_1$  kropki QD2. W obecności pola magnetycznego (stan normalny) obserwuje się niewielki ujemny nielokalny sygnał w momencie przejścia kropki QD2 przez położenia rezonansowe (związane ze zjawiskiem przesłuchu). W stanie nadprzewodzącym wzrost  $\Delta G_1$  jest o rząd wielkości większy. Korelacja pomiędzy przewodnictwem kropek kwantowych związana jest z rozdzielaniem par Coopera [8].

W 2010 roku została opublikowana kolejna praca, L. G. Herrmann *i inni* [9], w której do rozdzielania par Coopera wykorzystano kropki kwantowe wytworzone na nanorurce węglowej. Sprawność rozdzielania par Coopera w tym układzie wynosiła około 50%.

Sprawność rozdzielania zbliżoną do 100% udało się uzyskać w roku 2012 grupie z uniwersytetu w Bazylei [10]. Nadprzewodnikiem użytym w eksperymencie był PdAl, a kropki kwantowe zostały wytworzone na nanorurce węglowej. Nadprzewodnik charakteryzował się przerwą energetyczną  $\Delta \sim 120\mu eV$ , energie ładowania kropek kwantowych wynosiły  $U_1 \sim 7 meV$  i  $U_2 \sim 4 meV$ . W eksperymencie mierzono przewodnictwo dla obu ramion układu, pokazane na Rysunku 2.9. Widoczna w pomiarach przewodnictwa asy-

metria wynika z niesymetrycznego sprzężenia kropek z elektrodami. W momencie gdy położenie poziomów energetycznych obu kropek kwantowych znajdowało się w położeniu rezonansowym, obserwowano wzrost przewodnictwa, związany z przepływem elektronów par Coopera w sposób rozdzielony. Podobnie jak w poprzednim eksperymencie, umieszczenie układu w polu magnetycznym potwierdza powiązanie zachowania przewodnictwa z nadprzewodnictwem.



Rysunek 2.9. Rozdzielanie par Coopera: a) Obraz układu eksperymentalnego uzyskany za pomocą skaningowego mikroskopu elektronowego. b) Przewodnictwo  $G_1$  kropki kwantowej QD1 i przewodnictwo  $G_2$  kropki kwantowej QD2 w funkcji przyłożonego napięcia bramek  $V_{SG1}$  i  $V_{SG2}$  oraz schematy energetyczne lokalnego tunelowania par Coopera i rozdzielania par Coopera. c)  $G_1$  i  $G_2$  w funkcji napięcia  $V_{SG1}$ , dla  $V_{SG2} \approx 2.07V$  przy braku i w obecności zewnętrznego pola magnetycznego  $B = 250mT$ , niszczącego nadprzewodnictwo [10].

W tym samym roku opublikowano wyniki innego eksperymentu autorstwa A. Das *i inni* [11], w którym również udało się uzyskać sprawność rozdzielania zbliżoną do 100%. Nadprzewodnikiem użytym jako źródło par Coopera było aluminium, a kropki kwantowe zostały wykonane przy użyciu nanodrutu InAs.

## Rozdział 3

# Rozdzielanie par Coopera w złączu Josephsona z podwójną kropką kwantową

Przedstawione w poprzednim rozdziale wyniki prac teoretycznych oraz eksperymentalnych dotyczyły transportu w zakresie liniowego przewodnictwa oraz rezonansowego ustalenia poziomów energetycznych kropek kwantowych  $|\epsilon_d/\Delta| \ll 1$ . W takim przypadku mamy do czynienia z tunelowaniem elektronów w sposób sekwencyjny oraz osiągamy maksymalną sprawność rozdzielania par Coopera [56, 57]. W tym rozdziale na przykładzie układu podwójnej kropki kwantowej sprzężonej z dwoma nadprzewodzącymi elektrodami, zostanie omówiona możliwość rozdzielania par Coopera w zakresie wspóltunelowania oraz zostanie przedstawiony wpływ położenia poziomów energetycznych kropek kwantowych na sprawność rozdzielania par Coopera.

### 3.1. Tunelowanie sekwencyjne i wspóltunelowanie

Transport elektronów może być rozpatrywany zarówno w zakresie sekwencyjnego tunelowania, jak również w zakresie wspóltunelowania. W zakresie sekwencyjnym, dla omawianego układu podwójnej kropki kwantowej sprzężonej z elektrodą nadprzewodzącą oraz dwoma elektrodami normalnymi, przy przyłożonym większym od zera napięciu transportowym oraz poza obszarem blokady kulombowskiej, przez kropki kwantowe płynie w sposób sekwencyjny skończony prąd tunelowy. Proces przepływu elektronów przez układ odbywa się w następujący sposób:

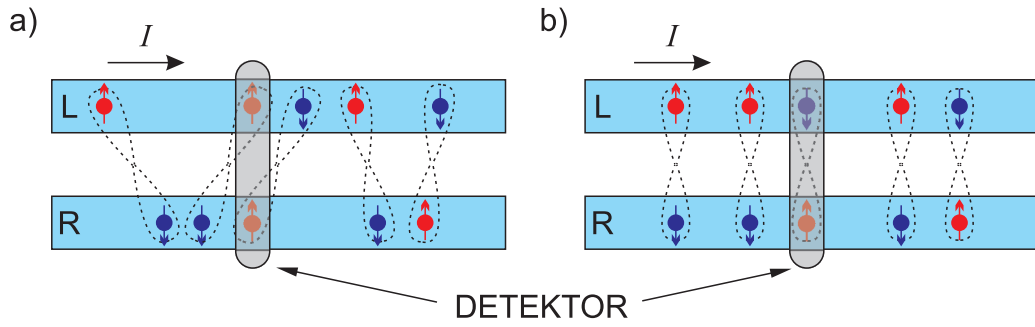
1. W wyniku bliskości nadprzewodnika kropki kwantowe zostają obsadzone parą elektronów w stanie singletowym  $|S\rangle$ .
2. Jeden elektron z pary tuneluje z kropki kwantowej do elektrody normalnej, drugi elektron pozostaje na kropce kwantowej.
3. Kolejne elektrony z nadprzewodnika nie mogą tunelować na wolną kropkę kwantową do czasu, aż drugi elektron z pary nie opuści zajmowanej kropki.

4. Drugi elektron z pary tuneluje z kropki kwantowej do elektrody normalnej. Kropki kwantowe są w stanie nieobsadzonym.
5. Kropki kwantowe zostają obsadzone parą elektronów w stanie singletowym i cykl powtarza się.

W wyniku przedstawionego wyżej procesu, stan podstawowy kropek kwantowych jest superpozycją stanu singletowego  $|S\rangle$  oraz stanu nieobsadzonych kropek kwantowych  $|0\rangle$ . Tunelowanie sekwencyjne odbywa się w wyniku jednoelektronowych procesów pierwszego rzędu.

W zakresie współtunelowania, czyli gdy poziomy energetyczne kropek kwantowych zostaną odsunięte od rezonansu,  $|\epsilon_d/\Delta| \gg 1$ , to przy odpowiednio małym napięciu transportowym układ znajdzie się w zakresie blokady kulombowskiej, gdzie procesy tunelowe pierwszego rzędu nie są możliwe. W zakresie blokady kulombowskiej możliwe jest jednak występowanie procesów wyższych rzędów. Mówimy wówczas o współtunelowaniu, które wykorzystuje pośrednie stany wirtualne o energii większej od energii stanu podstawowego. Współtunelowanie jest wynikiem fluktuacji kwantowych ładunku elektrycznego na kropce kwantowej i polega na skorelowanym przepływie pary Coopera przez cały układ. Dla omawianego układu proces współtunelowania jest procesem czwartego rzędu w rachunku zaburzeń, gdzie zaburzeniem jest hamiltonian tunelowy pomiędzy kropkami kwantowymi a elektrodami. Przejście pary elektronów przez układ wymaga zajścia czterech pojedynczych procesów tunelowania.

Tunelowanie sekwencyjne odbywa się w sposób nieuporządkowany, nieskorelowany, elektrony tunelują jeden po drugim. Jeżeli w układzie, na drodze par w obu kanałach transportowych (lewym i prawym), umieścimy detektor, to w przypadku tunelowania sekwencyjnego istnieje możliwość, że dokonamy pomiaru (lub operacji) na dwóch elektronach należących do różnych par Coopera lub niesparowanych elektronach, czyli niebędących w stanie splątania kwantowego. Zatem nieświadomie możemy dokonać błędnego pomiaru (Rysunek 3.1(a)). Zaletą współtunelowania jest uzyskanie uporządkowanego przepływu elektronów - jednocześnie tuneluje cała para Coopera. W każdym procesie detekcji mamy pewność, że analizowane są elektrony należące do jednej pary Coopera (Rysunek 3.1(b)). Wadą współtunelowania jest znaczne obniżenie natężenia prądu płynącego w układzie, w porównaniu do tunelowania sekwencyjnego, co może utrudnić detekcję.



Rysunek 3.1. Detekcja w procesach a) sekwencyjnego tunelowania, b) współtunelowania. W przypadku sekwencyjnego tunelowania istnieje niezerowe prawdopodobieństwo dokonania pomiaru (lub operacji) na dwóch elektronach należących do różnych par Coopera

### 3.2. Efekt Josephsona

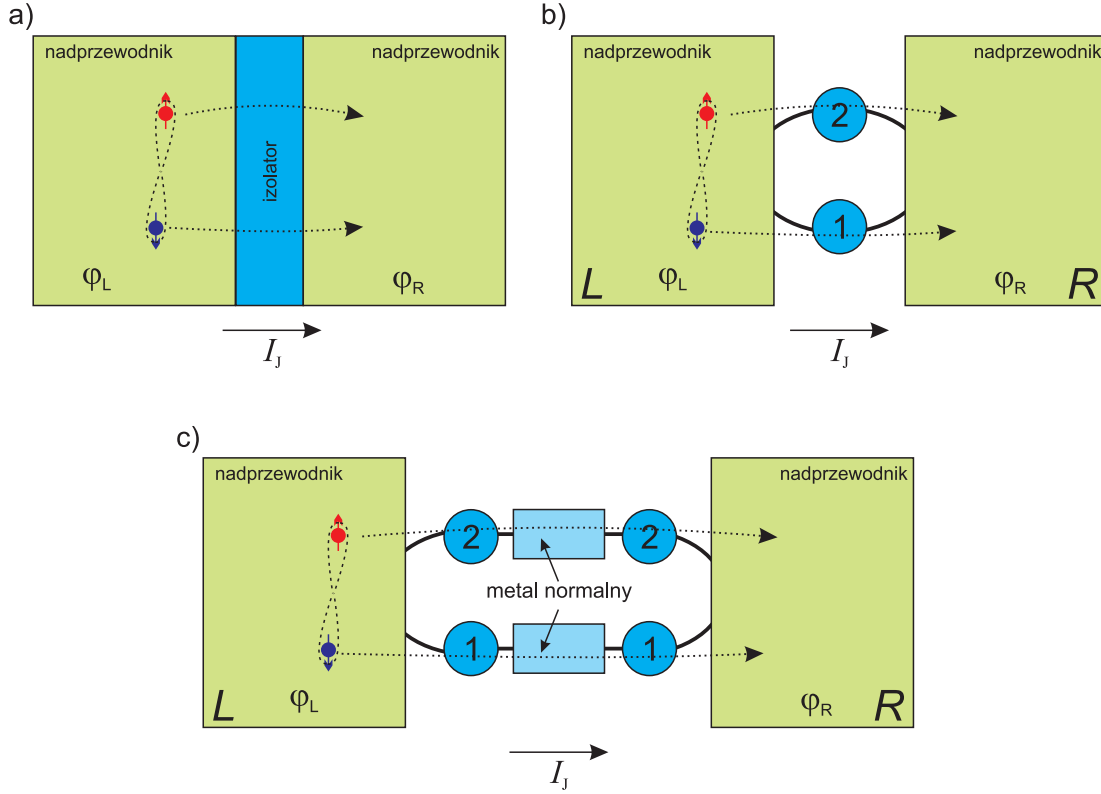
Układ podwójnej kropki kwantowej połączonej z dwoma nadprzewodzącymi elektrodami można traktować jako rodzaj złącza Josephsona, czyli układu, w którym dwa obszary nadprzewodzące oddzielone są obszarem o zmniejszonym parametrze porządku (Rysunek 3.2) [46, 45, 50]. Układ ten można potraktować jako przybliżenie bardziej złożonego układu, składającego się z dwóch podwójnych kropek kwantowych i umieszczonych między nimi elektrod normalnych o długości mniejszej niż długość koherencji, w których nadprzewodzące korelacje par Coopera są zachowane (Rysunek 3.2(c)). Tunelowanie par Coopera w takim układzie będzie odbywało się w taki sam sposób jak w złączu z jedną podwójną kropką kwantową.

Zwykle pojedyncze złącze Josephsona można uzyskać poprzez rozdzielenie dwóch nadprzewodników cienką warstwą izolatora lub nienadprzewodzącego metalu (o grubości porównywalnej lub mniejszej niż długość koherencji  $\xi$ ), poprzez przewężenie między nadprzewodnikami lub za pomocą kontaktu punktowego. Zjawisko Josephsona polega na tunelowaniu par Coopera przez takie złącze. Wyróżniamy stałoprądowe oraz zmiennoprądowe zjawisko Josephsona. W pierwszym przypadku jeżeli faza parametru porządku w nadprzewodnikach tworzących złącze jest różna, to również w nieobecności zewnętrznego pola elektrycznego lub magnetycznego, przez złącze przepływa stały prąd par Coopera (prąd Josephsona). Natężenie tego prądu zależy od różnicy faz parametru porządku oraz od parametru  $I_C$  odpowiadającego maksymalnej wartości prądu, który może płynąć przez dane złącze:

$$I_J = I_C \sin \varphi , \quad (3.1)$$

gdzie  $\varphi = \varphi_L - \varphi_R$  jest różnicą faz parametru porządku w złączu. Natężenie prądu Josephsona jest maksymalne dla  $\varphi = \pi/2$  oraz może się zmieniać od  $-I_C$  do  $I_C$ . Dla większości

złącz Josephsona  $I_C$  przyjmuje wartość od kilku  $\mu A$  do kilku  $mA$ . O zmiennoprądowym zjawisku Josephsona mówimy wówczas, gdy na złączu pojawi się napięcie  $V$  powodujące, że przez złącze popłynie prąd tunelowy normalnych elektronów oraz zmienny prąd Josephsona o częstotliwości  $f = 2eV/h$  [45].



Rysunek 3.2. Złącza Josephsona: a) dwa nadprzewodniki oddzielone warstwą izolatora, b) układ z podwójną kropką kwantową, c) układ z dwoma podwójnymi kropkami kwantowymi i elektrodami normalnymi między nimi. W układzie tym mamy możliwość wykonania operacji na splątanej parze Coopera.

### 3.3. Model

Analizowany układ składa się z dwóch kropek kwantowych ( $\alpha = 1, 2$ ) połączonych z dwoma elektrodami nadprzewodzącymi ( $l = L, R$ ). Zakładamy, że odległość między kropkami kwantowymi jest mniejsza niż długość koherencji par Coopera w nadprzewodniku. Hamiltonian układu złożony jest z trzech części,  $H = H_{BCS} + H_{DQD} + H_T$  [58, 59]. Hamiltonian  $H_{BCS}$ , opisujący elektrody nadprzewodzące typu s (elektrony tworzą parę w stanie singletowym), można uzyskać przekształcając hamiltonian opisujący parowanie elektronów (2.3) [46]:

$$H_{BCS} = \sum_{lk\sigma} \epsilon_{lk} c_{lk\sigma}^\dagger c_{lk\sigma} - \sum_{lk} \left( \Delta_{lk}(\varphi) c_{lk\uparrow}^\dagger c_{l-k\downarrow}^\dagger + h.c. \right), \quad (3.2)$$



gdzie parametr  $\Delta_{l\mathbf{k}}$  wyrażony jest równaniem (2.11) dla  $l$  elektrody. Podwójna kropka kwantowa opisana jest za pomocą hamiltonianu:

$$H_{\text{DQD}} = \sum_{\alpha} (\epsilon_{d\alpha} n_{\alpha} + U_{\alpha} n_{\alpha\uparrow} n_{\alpha\downarrow}) - t_d \sum_{\sigma} (d_{1\sigma}^{\dagger} d_{2\sigma} + h.c.), \quad (3.3)$$

mającego postać modelu Andersona dla dwóch kropek kwantowych (2.35), druga część hamiltonianu opisuje sprzężenie między kropkami kwantowymi z amplitudą tunelowania  $t_d$ . Tunelowanie między kropkami kwantowymi a elektrodami nadprzewodzącymi jest przedstawione za pomocą hamiltonianu:

$$H_{\text{T}} = \sum_{\alpha l \mathbf{k} \sigma} t_{\alpha, l \mathbf{k}} c_{l \mathbf{k} \sigma}^{\dagger} d_{\alpha \sigma} + h.c., \quad (3.4)$$

gdzie  $t_{\alpha, l \mathbf{k}}$  określa amplitudę tunelowania. Operatory  $c_{l \mathbf{k} \sigma}^{\dagger}$ ,  $d_{\alpha \sigma}^{\dagger}$  oznaczają kreację elektronu o spinie  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  odpowiednio na elektrodzie  $l$  i kropce kwantowej  $\alpha$ .

Zakładamy, że elektrody nadprzewodzące są jednakowe z różnicą fazy parametru porządku  $\varphi$ :

$$\epsilon_{l\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}}, \quad (3.5)$$

$$\Delta_{L\mathbf{k}} = \Delta_{\mathbf{k}} e^{+\varphi/2}, \quad (3.6)$$

$$\Delta_{R\mathbf{k}} = \Delta_{\mathbf{k}} e^{-\varphi/2}. \quad (3.7)$$

Podobne założenie identyczności czynimy wobec kropek kwantowych:

$$\epsilon_{d\alpha} = \epsilon_d, \quad (3.8)$$

$$U_{\alpha} = U. \quad (3.9)$$

Do hamiltonianów (3.2) i (3.4) stosujemy transformację cechowania:

$$\begin{bmatrix} c_{\bar{L}\mathbf{k}\sigma} \\ c_{\bar{R}\mathbf{k}\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi/4} & 0 \\ 0 & e^{+i\varphi/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{L\mathbf{k}\sigma} \\ c_{R\mathbf{k}\sigma} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

oraz transformację Bogoliubova:

$$\begin{bmatrix} c_{\bar{l}\mathbf{k}\uparrow} \\ c_{\bar{l}-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{\mathbf{k}} & v_{\mathbf{k}} \\ -v_{\mathbf{k}} & u_{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{l\mathbf{k}\uparrow} \\ \gamma_{l\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Powyższe przekształcenia powodują przeniesienie całości zależności od fazy parametru porządku do hamiltonianu opisującego tunelowanie  $H_T$  oraz przejście z opisu elektronowego do ułatwiającego obliczenia formalizmu kwazicząstek, który opisuje wzbudzenia stanu podstawowego BCS. W rezultacie hamiltoniany  $H_{BCS}$  i  $H_T$  możemy zapisać w postaci:

$$H_{BCS} = \sum_{lk\sigma} E_{lk} \gamma_{lk\sigma}^\dagger \gamma_{lk\sigma} , \quad (3.12)$$

$$H_T = \sum_{\alpha lk\sigma} t_{lk} \left( u_{\mathbf{k}} \gamma_{lk\sigma}^\dagger + \sigma v_{\mathbf{k}} \gamma_{lk\bar{\sigma}} \right) d_{\alpha\sigma} + h.c. , \quad (3.13)$$

gdzie  $\gamma_{lk\sigma}^\dagger$  oznacza kreację kwazicząstki na elektrodzie  $l$ , a  $E_{lk}$ ,  $v_{\mathbf{k}}$ ,  $u_{\mathbf{k}}$  są dane równaniami (2.6), (2.8), (2.9), oraz dokonaliśmy podstawienia:

$$\begin{bmatrix} t_{\alpha, L\mathbf{k}} e^{-i\varphi/4} \\ t_{\alpha, R\mathbf{k}} e^{+i\varphi/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{L\mathbf{k}} \\ t_{R\mathbf{k}} \end{bmatrix} = t_{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} e^{-i\varphi/4} \\ e^{+i\varphi/4} \end{bmatrix} , \quad (3.14)$$

gdzie amplituda tunelowania nie zależy od  $\alpha = 1, 2$ .

Zaproponowany model nie uwzględnia bezpośredniego tunelowania pomiędzy elektrodami z pominięciem kropek kwantowych. Wynika to z faktu braku obserwacji występującej w takim przypadku charakterystycznej asymetrii piku przewodnictwa w układach eksperymentalnych [60, 8, 9, 10, 11], oraz wykazaniem eksperymentalnie zerowym prądzie dla złącza Josephsona z pojedynczą kropką kwantową w przypadku gdy poziom energetyczny kropki kwantowej znajduje się w położeniu poza rezonansowym [61, 62].

### 3.4. Niezależny od czasu, niezdegenerowany rachunek zaburzeń

Użytą do obliczeń metodą jest niezależny od czasu, niezdegenerowany rachunek zaburzeń. Jest to metoda przybliżona, która znajduje zastosowanie w sytuacji, gdy znane jest rozwiązanie dla hamiltonianu  $H_0$ , a chcemy wyznaczyć rozwiązanie dla  $H = H_0 + V$ , gdzie  $V$  jest małe w porównaniu z  $H_0$ . Operator  $H_0$  nazywa się hamiltonianem niezaburzonym, a operator  $V$  hamiltonianem zaburzającym lub zaburzeniem [63, 64]. Dla omawianego układu:

$$H_0 = H_{BCS} + H_{DQD} , \quad (3.15)$$

$$V = H_T . \quad (3.16)$$

Zakładamy, że każdemu wektorowi własnemu  $|E_n^{(0)}\rangle \equiv |n^{(0)}\rangle$  operatora  $H_0$  odpowiadającemu wartości własnej  $E_n^{(0)}$  można przyporządkować wektor własny  $|n\rangle$  operatora  $H$  odpowiadający wartości własnej  $E_n$  [63]. Wektory oraz wartości własne operatora  $H$  można przedstawić w postaci szeregów perturbacyjnych:

$$|n\rangle = |n^{(0)}\rangle + |n^{(1)}\rangle + |n^{(2)}\rangle + \dots, \quad (3.17)$$

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \dots, \quad (3.18)$$

gdzie indeks górny  $i$  oznacza rząd wyrazu, gdyż jest on proporcjonalny do elementu macierzowego  $V$  w potęgze  $i$ . Wraz ze wzrostem rzędu powinniśmy otrzymywać wyrazy coraz mniejsze, czyli w tym znaczeniu  $V$  jest małym zaburzeniem.

Wyrazy szeregów (3.17) i (3.18) otrzymujemy wychodząc z zagadnienia własnego:

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (3.19)$$

W rezultacie otrzymujemy [64]:

$$E_n^{(1)} = \langle n^{(0)} | V | n^{(0)} \rangle, \quad (3.20)$$

$$E_n^{(2)} = \langle n^{(0)} | V | n^{(1)} \rangle = \langle n^{(0)} | V \frac{1 - P_n}{E_n^{(0)} - H_0} V | n^{(0)} \rangle, \quad (3.21)$$

$$E_n^{(3)} = \langle n^{(0)} | V | n^{(2)} \rangle = \langle n^{(0)} | V \frac{1 - P_n}{E_n^{(0)} - H_0} (V - E_n^{(1)}) | n^{(1)} \rangle, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} E_n^{(4)} &= \langle n^{(0)} | V | n^{(3)} \rangle = \langle n^{(0)} | V \frac{1 - P_n}{E_n^{(0)} - H_0} (V - E_n^{(1)}) | n^{(2)} \rangle \\ &\quad - \langle n^{(0)} | V \frac{1 - P_n}{E_n^{(0)} - H_0} E_n^{(2)} | n^{(1)} \rangle, \end{aligned} \quad (3.23)$$

oraz

$$|n^{(1)}\rangle = \frac{1 - P_n}{E_n^{(0)} - H_0} V |n^{(0)}\rangle, \quad (3.24)$$

$$|n^{(2)}\rangle = \frac{1 - P_n}{E_n^{(0)} - H_0} (V - E_n^{(1)}) |n^{(1)}\rangle, \quad (3.25)$$

$$|n^{(3)}\rangle = \frac{1 - P_n}{E_n^{(0)} - H_0} (V - E_n^{(1)}) |n^{(2)}\rangle - \frac{1 - P_n}{E_n^{(0)} - H_0} E_n^{(2)} |n^{(1)}\rangle, \quad (3.26)$$

gdzie:

$$\frac{1 - P_n}{E_n^{(0)} - H_0} = \sum_{m \neq n} \frac{1}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |m^{(0)}\rangle \langle m^{(0)}|. \quad (3.27)$$

### 3.5. Prąd Josephsona

Operator prądu Josephsona obliczamy z definicji jako zmianę w czasie liczby cząstek po obu stronach złącza:

$$I_J = e \frac{\dot{N}_L - \dot{N}_R}{2}, \quad (3.28)$$

gdzie:

$$\dot{N}_l = \frac{i}{\hbar} \left[ H, \sum_{\mathbf{k}} n_{l\mathbf{k}} \right]. \quad (3.29)$$

Wstawiając hamiltonian układu do wyrażenia (3.29) a następnie korzystając z (3.28) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I_J &= \frac{2e}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left( \frac{\partial t_{L\mathbf{k}}^*}{\partial \varphi} d_{1\sigma}^\dagger c_{1\mathbf{k}\sigma} - \frac{\partial t_{R\mathbf{k}}^*}{\partial \varphi} d_{1\sigma}^\dagger c_{2\mathbf{k}\sigma} + \frac{\partial t_{L\mathbf{k}}^*}{\partial \varphi} d_{2\sigma}^\dagger c_{1\mathbf{k}\sigma} - \frac{\partial t_{R\mathbf{k}}^*}{\partial \varphi} d_{2\sigma}^\dagger c_{2\mathbf{k}\sigma} - h.c. \right) \\ &= \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Można pokazać, że dla wartości własnych  $H$  wyrazy rzędu pierwszego (3.20) i trzeciego (3.22) są równe zero, ponieważ w wyniku procesów tych rzędów układ pozostaje w stanie wzbudzonym, czyli energia układu nie zostaje zachowana. Wyraz rzędu drugiego (3.21) przyjmuje wartość różną od zera, ale otrzymany wynik jest niezależny od różnicy faz parametru porządku po obu stronach złącza, zatem procesy rzędu drugiego nie będą dawały wkładu do prądu Josephsona. Wartość niezerową, zależną od faz parametru porządku, otrzymujemy dla wyrazu rzędu czwartego (3.23), który możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} E_{gs}^{(4)} &= \langle gs | V \frac{1 - P_n}{E_{gs}^{(0)} - H_0} V \frac{1 - P_n}{E_{gs}^{(0)} - H_0} V \frac{1 - P_n}{E_{gs}^{(0)} - H_0} V | gs \rangle \\ &\quad - \langle gs | V \frac{1 - P_n}{E_{gs}^{(0)} - H_0} V | gs \rangle \langle gs | V \left( \frac{1 - P_n}{E_{gs}^{(0)} - H_0} \right)^2 V | gs \rangle, \end{aligned} \quad (3.31)$$

gdzie przez  $|gs\rangle$  oznaczono stan podstawowy układu i dokonano podstawienia:

$$|n^{(0)}\rangle = |gs\rangle. \quad (3.32)$$

Drugą część wyrażenia (3.31) możemy zaniedbać, ponieważ podobnie jak  $E_{gs}^{(2)}$ , nie jest zależna od różnicy faz parametru porządku. Wobec tego wartość oczekiwana prądu wynosi:

$$\langle I_J \rangle = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial E_{gs}^{(4)}}{\partial \varphi} = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi} \langle gs | V \frac{1 - P_{gs}}{E^{(0)} - H_0} V \frac{1 - P_{gs}}{E^{(0)} - H_0} V \frac{1 - P_{gs}}{E^{(0)} - H_0} V | gs \rangle = I_C \sin(\varphi) . \quad (3.33)$$

Pojedynczy wkład do  $E_{gs}^{(4)}$  zależny jest od czynnika fazowego  $\propto e^{(i\varphi)}$  lub  $\propto e^{(-i\varphi)}$ . Suma dwóch wkładów wzajemnie sprzężonych pozostawia zależność od różnicy faz parametru porządku w postaci  $\propto \cos(\varphi)$ , co po obliczeniu pochodnej względem  $\varphi$  daje zależność przedstawioną w równaniu (3.33).

Stan podstawowy układu jest złożeniem stanu podstawowego BCS elektrod lewej i prawej oraz stanu podstawowego kropek kwantowych:

$$|gs\rangle = |BCS\rangle_L \otimes |gs\rangle_{DQD} \otimes |BCS\rangle_R . \quad (3.34)$$

W niniejszej pracy rozpatrzone zostaną następujące stany podstawowe kropek kwantowych:

1. Obsadzenie kropek kwantowych parą elektronów w stanie singletowym  $|S\rangle_{DQD}$ .
2. Puste kropki kwantowe  $|0\rangle_{DQD}$ .
3. Obsadzenie podwójnej kropki kwantowej parą elektronów w spinowym stanie trypletowym  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$ ,  $|\downarrow\downarrow\rangle_{DQD}$  i  $|T\rangle_{DQD}$ .

Dla  $U \rightarrow \infty$  oraz  $t_d \ll |\epsilon_d|$  energie poszczególnych stanów kropek kwantowych, które można otrzymać dokonując diagonalizacji hamiltonianu, przedstawione są na Rysunku 3.3, gdzie  $J$  określa oddziaływania wymiany między elektronami na kropkach kwantowych. Na wartość  $J$  składają się oddziaływania bezpośrednio pomiędzy kropkami kwantowymi, jak również oddziaływania zachodzące przy udziale elektrod nadprzewodzących.

### 3.5.1. Stan podstawowy $|S\rangle_{DQD}$

Podstawiając postać  $V$  (3.13) do wyrażenia na prąd Josephsona (3.33) otrzymujemy  $32^4$ , czyli 1 048 576 kombinacji dla każdego stanu podstawowego. Liczbę kombinacji możemy ograniczyć jeżeli odrzucimy procesy, w których energia całkowita nie zostaje zachowana, które nie zależą od różnicy faz  $\varphi$  parametru porządku, oraz procesy, które wymagają podwójnego obsadzenia pojedynczej kropki kwantowej ( $U \rightarrow \infty$ ). W rezultacie dla singletowego stanu podstawowego podwójnej kropki kwantowej otrzymujemy 256 dozwolonych kombinacji, które zostały obliczone. W celu zwiększenia przystępności pracy, w tej części

Stan podwójnej kropki kwantowej	Energia
$ S\rangle_{DQD} = \frac{1}{\sqrt{2}} (d_{2\uparrow}^\dagger d_{1\downarrow}^\dagger - d_{2\downarrow}^\dagger d_{1\uparrow}^\dagger)  0\rangle_{DQD}$	$2\epsilon_d - J$
$ \uparrow\uparrow\rangle_{DQD} = d_{2\uparrow}^\dagger d_{1\uparrow}^\dagger  0\rangle_{DQD}$	$2\epsilon_d$
$ T\rangle_{DQD} = \frac{1}{\sqrt{2}} (d_{2\uparrow}^\dagger d_{1\downarrow}^\dagger + d_{2\downarrow}^\dagger d_{1\uparrow}^\dagger)  0\rangle_{DQD}$	$2\epsilon_d$
$ \downarrow\downarrow\rangle_{DQD} = d_{2\downarrow}^\dagger d_{1\downarrow}^\dagger  0\rangle_{DQD}$	$2\epsilon_d$
$ e; \sigma\rangle_{DQD} = d_{e\sigma}^\dagger  0\rangle_{DQD} = \frac{1}{\sqrt{2}} (d_{1\sigma}^\dagger + d_{2\sigma}^\dagger)  0\rangle_{DQD}$	$\epsilon_d - t_d$
$ o; \sigma\rangle_{DQD} = d_{o\sigma}^\dagger  0\rangle_{DQD} = \frac{i}{\sqrt{2}} (d_{1\sigma}^\dagger - d_{2\sigma}^\dagger)  0\rangle_{DQD}$	$\epsilon_d + t_d$
$ 0\rangle_{DQD}$	0

Rysunek 3.3. Możliwe stany i odpowiadające im energie podwójnej kropki kwantowej. Pierwsze dwie części tabeli przedstawiają możliwe stany dla przypadku obsadzenia podwójnej kropki kwantowej dwoma elektronami. Trzecia część przedstawia stany dla przypadku, w którym na podwójnej kropce kwantowej znajduje się pojedynczy elektron. Ostatnia część tabeli odpowiada nieobsadzonym kropkom kwantowym.

rozprawy zostaną przedstawione jedynie wyniki dla procesów, w których niedozwolone jest tunelowanie elektronów pomiędzy kropkami kwantowymi (uproszczenie  $t_d \rightarrow 0$ ), co pozostawia 56 możliwości dla stanu singletowego. Wyniki dla  $t_d > 0$  zostały przedstawione w Dodatku A.

Rozpatrujemy układ w którym:

1.  $U \rightarrow \infty$  - niedozwolone jest jednoczesne przebywanie dwóch elektronów na jednej kropce kwantowej,
2.  $\epsilon_d < 0$  - singletowy stan podstawowy kropek kwantowych  $|S\rangle_{DQD}$ ,
3.  $k_B T \ll J, T \rightarrow 0$  - stan podstawowy kropek kwantowych nie może zostać wzbudzony termicznie do stanu trypletowego  $|T\rangle_{DQD}$ ,
4.  $\Delta \gg k_B T$  - w stanie podstawowym brak wzbudzonych kwazicząstek,
5.  $\Delta \gg k_B T_K$  - zaniedbywalny efekt Kondo [59].

Jako przykład zostanie przedstawiony jeden z 56 procesów dający wkład do prądu Josephsona:

$$\begin{aligned}
\delta E_{|S\rangle}^{(4)} &= \langle S | \sum_{\mathbf{k}^{(1)}} t_{L\mathbf{k}^{(1)}}^* u_{\mathbf{k}^{(1)}} d_{1\uparrow}^\dagger \gamma_{L\mathbf{k}^{(1)\uparrow}} \frac{1 - P_{gs}}{E^{(0)} - H_0} \sum_{\mathbf{k}^{(2)}} t_{L\mathbf{k}^{(2)}}^* v_{\mathbf{k}^{(2)}} d_{2\downarrow}^\dagger \gamma_{L\mathbf{k}^{(2)\uparrow}}^\dagger \frac{1 - P_{gs}}{E^{(0)} - H_0} \\
&\quad \times \sum_{\mathbf{k}^{(3)}} t_{R\mathbf{k}^{(3)}} v_{\mathbf{k}^{(3)}} \gamma_{R\mathbf{k}^{(3)\uparrow}} d_{2\downarrow} \frac{1 - P_{gs}}{E^{(0)} - H_0} \sum_{\mathbf{k}^{(4)}} t_{R\mathbf{k}^{(4)}} u_{\mathbf{k}^{(4)}} \gamma_{R\mathbf{k}^{(4)\uparrow}}^\dagger d_{1\uparrow} |S\rangle . \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Odpowiadający mu proces pokazany jest na Rysunku 3.4. Lewa część rysunku przedstawia

schemat poziomów energetycznych złącza. Poziomy energetyczne kropki kwantowych  $QD_1$  i  $QD_2$  narysowane są obok siebie, jednak kropki kwantowe są połączone równolegle, tak jak jest to przedstawione na prawej części rysunku. Prawa część rysunku schematycznie pokazuje położenie elektronów w poszczególnych etapach tunelowania pary Coopera przez złącze Josephsona, które w tym przypadku odbywa się w następujący sposób:

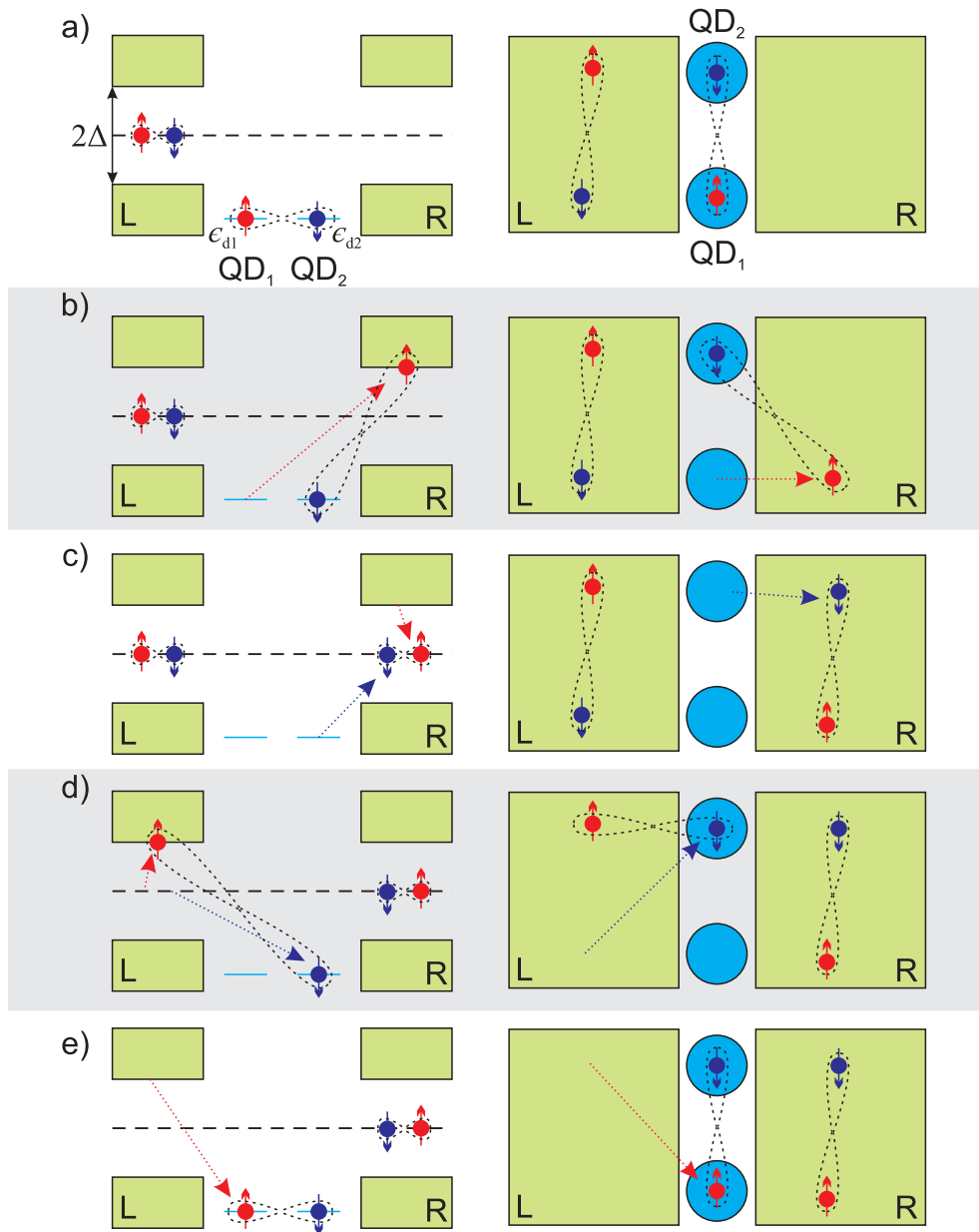
1. Kropki kwantowe obsadzone są przez parę elektronów w stanie  $|S\rangle_{DQD}$ , na lewej elektrodzie znajduje się para Coopera (Rysunek 3.4(a)).
2. Przedstawiona kombinacja operatorów narzuca tunelowanie elektronu o spinie w górę z kropki kwantowej oznaczonej numerem 1 do prawej elektrody nadprzewodzącej. W elektrodzie nadprzewodzącej następuje kreacja wzbudzonej kwazicząstki (Rysunek 3.4(b)).
3. Elektron o spinie w dół tuneluje z kropki kwantowej oznaczonej numerem 2 do prawej elektrody nadprzewodzącej. W elektrodzie nadprzewodzącej następuje anihilacja wzbudzonej w poprzednim procesie kwazicząstki i utworzenie pary Coopera (Rysunek 3.4(c)).
4. W lewej elektrodzie nadprzewodzącej następuje rozerwanie pary Coopera. Elektron o spinie w dół tuneluje do kropki kwantowej oznaczonej numerem 2. Na lewej elektrodzie zostaje wzbudzona kwazicząstka (Rysunek 3.4(d)).
5. Następuje anihilacja kwazicząstki i kreacja elektronu ze spinem w górę na kropce kwantowej oznaczonej numerem 1. Na kropkach kwantowych znajduje się teraz para elektronów w stanie dwucząstkowym  $|S\rangle_{DQD} - |T\rangle_{DQD}$ . Para Coopera przetunelowała z lewej na prawą stronę złącza (Rysunek 3.4(e)).
6. W procesie symetrycznym ze względu na spiny elektronów stan końcowy kropek kwantowych ma postać  $|S\rangle_{DQD} + |T\rangle_{DQD}$ . Suma obu procesów ustala stan końcowy kropek kwantowych w postaci stanu singletowego  $|S\rangle_{DQD}$ .

Do obliczenia przedstawionego wkładu do prądu Josephsona (3.35) korzystamy z następujących działań operatorów na stany kropek kwantowych:

$$d_{1\uparrow} |S\rangle_{DQD} = \frac{1}{2} (|e; \downarrow\rangle_{DQD} + i |o; \downarrow\rangle_{DQD}) , \quad (3.36)$$

$$d_{2\downarrow} |e; \downarrow\rangle_{DQD} = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle , \quad (3.37)$$

$$d_{2\downarrow} |o; \downarrow\rangle_{DQD} = -\frac{i}{\sqrt{2}} |0\rangle , \quad (3.38)$$



Rysunek 3.4. Schemat przykładowego procesu tunelowania pary Coopera przez złącze Josephsona dla kropek kwantowych obsadzonych w stanie podstawowym parą elektronów w stanie singletowym  $|S\rangle_{DQD}$ . Dla uproszczenia stan singletowy został przedstawiony w postaci dwóch elektronów o przeciwnych spinach. Po lewej stronie rysunku pokazany został schemat poziomów energetycznych układu. Poziome energetyczne kropki kwantowych  $\epsilon_{d1}$  i  $\epsilon_{d2}$  narysowane są obok siebie, ale nie jest to równoważne szeregowemu połączeniu kropek. Po prawej stronie rysunku pokazano schematycznie położenie elektronów w układzie. a) Stan początkowy - para Coopera znajduje się po lewej stronie złącza, kropki kwantowe obsadzone są parą elektronów w stanie singletowym. b) Elektron z pierwszej kropki kwantowej tuneluje do prawej elektrody nadprzewodzącej, następuje wzbudzenie kwazicząstki. c) Elektron z drugiej kropki kwantowej tuneluje do elektrody. Następuje anihilacja wzbudzonej kwazicząstki i utworzenie pary Coopera. d) Następuje rozerwanie pary Coopera na lewej elektrodzie. Na elektrodzie zostaje wzbudzona kwazicząstka. Jeden z elektronów z pary tuneluje na drugą kropkę kwantową. e) Następuje anihilacja kwazicząstki i tunelowanie elektronu z lewej elektrody na pierwszą kropkę kwantową. Ustala się stan końcowy, z parą Cooper, która przetunelowała przez złącze i parą elektronów w stanie singletowym na kropkach kwantowych.



$$d_{2\downarrow}^\dagger |0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} (|e; \downarrow\rangle_{DQD} + i |o; \downarrow\rangle_{DQD}) , \quad (3.39)$$

$$d_{1\uparrow}^\dagger |e; \downarrow\rangle_{DQD} = \frac{1}{2} (|S\rangle_{DQD} - |T\rangle_{DQD}) , \quad (3.40)$$

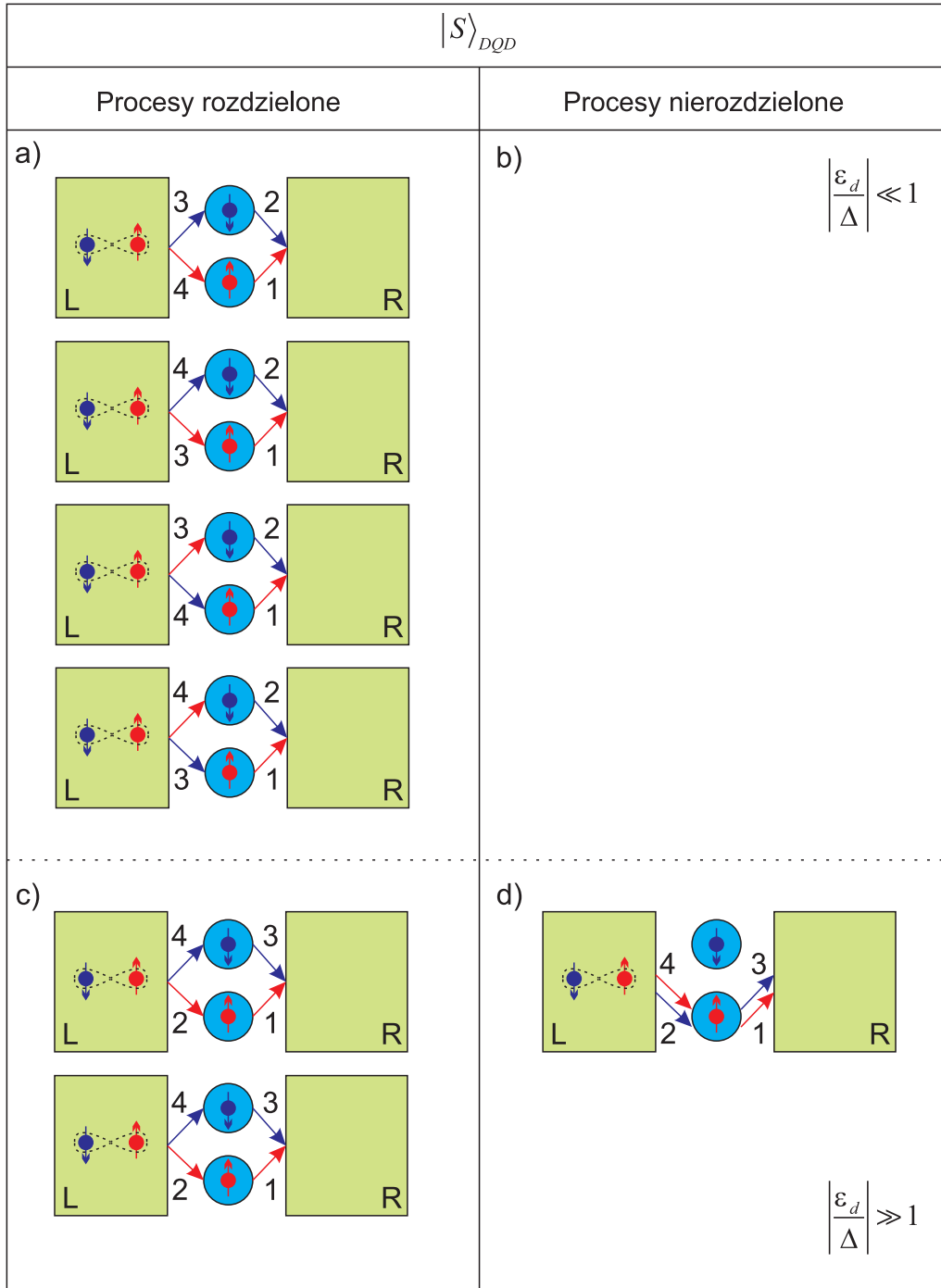
$$d_{1\uparrow}^\dagger |o; \downarrow\rangle_{DQD} = -\frac{i}{2} (|S\rangle_{DQD} - |T\rangle_{DQD}) . \quad (3.41)$$

W rezultacie otrzymujemy wkład do prądu Josephsona, który po uwzględnieniu procesu symetrycznego do przedstawionego w równaniu (3.35) ze względu na zmianę kierunku spinów elektronów, oraz procesów do nich sprzężonych (procesy o takim samym przebiegu, ale w przeciwnym kierunku - z elektrody prawej na lewą), który wynosi:

$$\delta I_{J|S} = -2 \sin \varphi \sum_{\mathbf{kq}} t_{\mathbf{k}}^2 t_{\mathbf{q}}^2 u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} \frac{1}{\epsilon_d - E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{\epsilon_d - E_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\epsilon_d} . \quad (3.42)$$

Podobnie postępujemy dla pozostałych 54 dozwolonych procesów tunelowania.

Korzystając z symetrii układu (nierozróżnialne kropki kwantowe, symetria spinów elektronów, przeciwny kierunek tunelowania), dozwolone procesy tunelowania pokazano na Rysunku 3.5. Numerami od 1 do 4 została oznaczona kolejność tunelowania elektronów. Kolory strzałek, czerwony i niebieski, odpowiadają tunelowaniu odpowiednio elektronów ze spinem w górę i spinem w dół. Grupa procesów powyżej przerywanej linii daje największy wkład do prądu Josephsona, gdy poziomy energetyczne kropek kwantowych zbliżone są do rezonansu ( $|\epsilon_d/\Delta| \ll 1$ ). Są to procesy w których stanem pośrednim jest stan pustych kropek kwantowych i w których w całym procesie tunelowania pary Coopera z jednej na drugą stronę złącza, w danym etapie procesu, wzbudzona zostaje tylko pojedyncza kwazicząstka. Prąd pochodzący od tych procesów proporcjonalny jest do  $\propto 1/|\epsilon_d|$  i powstaje wyłącznie przy udziale procesów rozdzielających parę Coopera. Dla poziomów kropek kwantowych oddalonych od rezonansu,  $|\epsilon_d/\Delta| \gg 1$ , dominujące są procesy charakteryzujące się przejściem pośrednim przez stan będący superpozycją stanu singletowego i trypletowego niemagnetycznego, lub któryś ze stanów trypletowych magnetycznych. W tych procesach mamy do czynienia z jednoczesnym wzbudzeniem dwóch kwazicząstek po obu stronach złącza zarówno w przypadku gdy para Coopera tuneluje w sposób rozdzielony, jak i nierozdzielony, a prąd Josephsona będący wynikiem obu rodzajów procesów jest proporcjonalny do  $\propto 1/(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}})$ . Uwzględniając wkłady do prądu Josephsona od wszystkich procesów, na podstawie równania (3.33) oraz zastępując sumowanie po wektorze  $\mathbf{k}$  całką po energii, otrzymujemy wyrażenie na prąd Josephsona  $I_J$ , który jest sumą prądu „rozdzielonego”  $I_{SPL}$  i „nierozdzielonego”  $I_{UNSP}$ ,  $I_J = I_{SPL} + I_{UNSP}$ . Zakładając przybliżenie  $J \ll \epsilon_d$



Rysunek 3.5. Procesy tunelowania dla singletowego stanu podstawowego podwójnej kropki kwantowej. Linia przerywana oddziela procesy, które dominują w pobliżu położenia rezonansowego ( $|\epsilon_d/\Delta| \ll 1$ ) od procesów dających największy wkład do prądu poza położeniem rezonansowym ( $|\epsilon_d/\Delta| \gg 1$ ). Strzałkami oznaczone są procesy tunelowania elektronów, których kolejność oznaczona jest liczbami 1-4. Część a) przedstawia procesy rozdzielające parę Coopera, które dominują w pobliżu położenia rezonansowego poziomów energetycznych kropek kwantowych. Podczas przebiegu tych procesów nie mamy jednoczesnego wzbudzenia więcej niż jednej kwazicząstki. b) W pobliżu rezonansu procesy nierozdzielone dają niewielki wkład. Procesy c) i d) dają największy wkład poza położeniem rezonansowym. W procesach tych mamy do czynienia z wzbudzeniem dwóch kwazicząstek w stanie pośrednim.

składowe prądu Josephsona można zapisać w postaci:

$$I_{SPL} = \frac{2e}{\hbar} 8 \sin \varphi t_{\mathbf{k}}^2 t_{\mathbf{q}}^2 N_L N_R \int d\epsilon_L \int d\epsilon_R u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} \frac{1}{\epsilon_d - E_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\epsilon_d - E_{\mathbf{k}}} \left( \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}}} - \frac{1}{\epsilon_d} \right), \quad (3.43)$$

$$I_{UNSP} = -\frac{2e}{\hbar} 4 \sin \varphi t_{\mathbf{k}}^2 t_{\mathbf{q}}^2 N_L N_R \int d\epsilon_L \int d\epsilon_R u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} \frac{1}{\epsilon_d - E_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\epsilon_d - E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}}}, \quad (3.44)$$

gdzie  $N_L$ ,  $N_R$  oznaczają gęstości stanów na lewej i prawej elektrodzie. W pobliżu położenia rezonansowego, dla  $|\epsilon_d| \rightarrow 0$ , dominujący wkład do prądu Josephsona  $I_J$  pochodzi od procesów rozdzielonych  $I_{SP}$  i jest on proporcjonalny do  $1/|\epsilon_d|$ . Poza położeniem rezonansowym wkłady od prądów „rozdzielonych” i „nierozdzielonych” zaczynają być porównywalne. W równaniu (3.44) pojawia się znak ujemny dla prądu Josephsona, co można zinterpretować jako przesunięcie w fazie o  $\pi$ , korzystając z równania:

$$I_J = -|I_C| \sin \varphi = |I_C| \sin(\varphi + \pi). \quad (3.45)$$

Zatem poza położeniem rezonansowym prąd Josephsona  $I_J$  składa się z dwóch porównywalnych części różniących się zależnością fazową o  $\pi$ .

### 3.5.2. Stan podstawowy $|0\rangle_{DQD}$

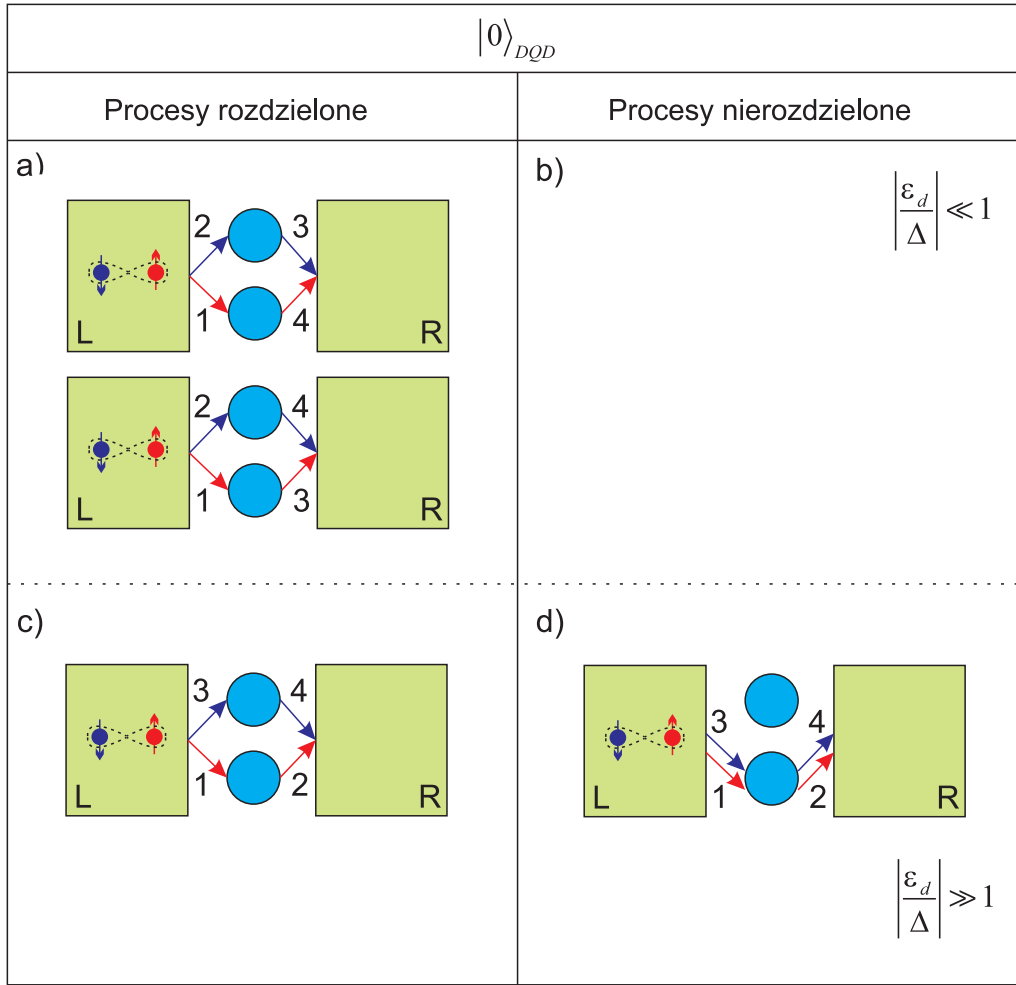
Metoda obliczenia prądu Josephsona dla stanu  $|0\rangle_{DQD}$  jest podobna, jak dla stanu singletowego. Dozwolona liczba procesów jest równa 192, po uwzględnieniu warunku  $t_d \rightarrow 0$  otrzymujemy 32 kombinacje. Dla stanu podstawowego pustych kropek  $|0\rangle_{DQD}$  energie poziomów energetycznych kropek kwantowych spełniają warunek  $\epsilon_d > 0$ . Uwzględniając poprzednio wymienione symetrie układu, dozwolone procesy tunelowania zostały przedstawione na Rysunku 3.6. Blisko warunku rezonansu,  $|\epsilon_d/\Delta| \ll 1$ , dominują procesy dla których stan pośredni procesu tunelowania jest stanem singletowym, oraz podobnie jak to miało miejsce dla  $|S\rangle_{DQD}$ , nie ma jednoczesnego wzbudzenia dwóch kwazicząstek. Dla procesów oddalonych od rezonansu,  $|\epsilon_d/\Delta| \gg 1$ , stanem pośrednim jest stan pusty z podwójnym wzbudzeniem kwazicząstek.

Prąd Josephsona dla stanu podstawowego  $|0\rangle_{DQD}$  wynosi:

$$I_{SP} = \frac{2e}{\hbar} 8 \sin \varphi t_{\mathbf{k}}^2 t_{\mathbf{q}}^2 N_L N_R \int d\epsilon_L \int d\epsilon_R u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} \frac{1}{E_{\mathbf{q}} + \epsilon_d} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + \epsilon_d} \left( \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}}} + \frac{1}{\epsilon_d} \right), \quad (3.46)$$

$$I_{UNSP} = \frac{2e}{\hbar} 8 \sin \varphi t_{\mathbf{k}}^2 t_{\mathbf{q}}^2 N_L N_R \int d\epsilon_L \int d\epsilon_R u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} \frac{1}{E_{\mathbf{q}} + \epsilon_d} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + \epsilon_d} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}}}. \quad (3.47)$$

Istotną różnicą w prądzie Josephsona dla stanów  $|S\rangle_{DQD}$  i  $|0\rangle_{DQD}$  jest zmiana znaku  $I_C$  dla prądów nierozdzielonych [58]. Możemy to przeanalizować traktując prąd nierozdzielony w układzie z podwójną kropką kwantową jako prąd Josephsona płynący przez złącze Josephsona z pojedynczą kropką kwantową.



Rysunek 3.6. Procesy tunelowania dla nieobsadzonych kropek kwantowych w stanie podstawowym. Linia przerywana oddziela procesy, które dominują w pobliżu położenia rezonansowego ( $|\varepsilon_d/\Delta| \ll 1$ ) od procesów dających największy wkład do prądu poza położeniem rezonansowym ( $|\varepsilon_d/\Delta| \gg 1$ ). Strzałkami oznaczone są procesy tunelowania elektronów, których kolejność oznaczona jest liczbami 1-4. Część a) przedstawia procesy rozdzielające parę Coopera, które dominują w pobliżu położenia rezonansowego poziomów energetycznych kropek kwantowych. Podczas przebiegu tych procesów nie mamy jednoczesnego wzbudzenia więcej niż jednej kwazicząstki. b) W pobliżu rezonansu procesy nierozdzielone dają niewielki wkład. Procesy c) i d) dają największy wkład poza położeniem rezonansowym. W procesach tych mamy do czynienia z wzbudzeniem dwóch kwazicząstek w stanie pośrednim.

Dla nieobsadzonej kropki kwantowej otrzymujemy wyrażenie na prąd Josephsona zgodne z równaniem (3.1), czyli prąd o dodatniej wartości prądu krytycznego:

$$I_J = I_C \sin \varphi, \quad (3.48)$$

Jeżeli złącze Josephsona jest sterowane prądem  $I$  (current bias), to złącze zareaguje zmianą fazy  $\varphi = \arcsin(I/I_C)$ . Ponieważ zależność fazowa jest periodyczna, z okresem  $2\pi$ , możemy w dalszej analizie ograniczyć się do zakresu  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Kiedy przez złącze nie płynie prąd ( $I = 0$ ), złącze jest w stanie podstawowym i różnica faz po obu stronach

złącza jest równa  $\varphi = 0$ . Różnica faz może wynosić  $\varphi = \pi$  i również przez złącze nie będzie płynął prąd. Okazuje się, że stan o  $\varphi = \pi$  jest niestabilny i odpowiada maksimum energii Josephsona, a stan o  $\varphi = 0$  odpowiada minimum energii Josephsona i jest stanem podstawowym. Energia Josephsona jest to energia potencjalna zgromadzona na złączu Josephsona podczas przepływu prądu nadprzewodzącego przez złącze. Złącze o stanie podstawowym  $\varphi = 0$  nazywane jest złączem Josephsona typu 0.

Dla złącza Josephsona z pojedynczą kropką kwantową, w przypadku obsadzenia w stanie podstawowym kropki kwantowej pojedynczym elektronem, otrzymujemy prąd Josephsona zgodny z równaniem (3.45), czyli prąd o ujemnej wartości prądu krytycznego:

$$I_J = -|I_C| \sin \varphi = |I_C| \sin(\varphi + \pi) . \quad (3.49)$$

W przypadku, gdy prąd przyłożony do złącza  $I = 0$ , w stanie podstawowym złącza otrzymujemy  $\varphi = \pi$ , co odpowiada minimum energii Josephsona, podczas gdy konwencjonalny stan  $\varphi = 0$  jest niestabilny i odpowiada maksimum energii Josephsona. Złącze o stanie podstawowym  $\varphi = \pi$  nazywane jest złączem Josephsona typu  $\pi$ . Zatem w zależności od stanu podstawowego kropki kwantowej możemy zmieniać rodzaj złącza Josephsona pomiędzy złączem typu 0, a złączem typu  $\pi$ .

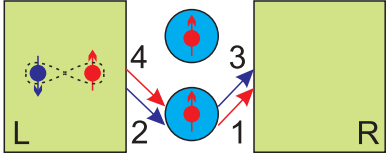
### 3.5.3. Stan podstawowy $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$ (lub $|\downarrow\downarrow\rangle_{DQD}$ )

Ostatnim analizowanym stanem podstawowym podwójnej kropki kwantowej jest stan trypletowy magnetyczny  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$  (lub  $|\downarrow\downarrow\rangle_{DQD}$ ), który może zostać uzyskany poprzez przyłożenie zewnętrznego pola magnetycznego. Dla tego stanu podstawowego energia poziomów energetycznych kropek kwantowych  $\epsilon_d < 0$ , liczba dozwolonych kombinacji wynosi 32, a po zastosowaniu przybliżenia  $t_d \rightarrow 0$  dozwolone są tylko 4 procesy, które zostały schematycznie przedstawione na Rysunku 3.7.

W analizowanym układzie niemożliwy jest przepływ pary Coopera w sposób rozdzielony w procesie czwartego rzędu. Całkowity prąd Josephsona dla stanu trypletowego  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$  jest równy prądowi nierozdzielonemu dla stanu  $|S\rangle_{DQD}$  wyrażonemu równaniem (3.44):

$$I_J = I_{UNSP} = -\frac{2e}{\hbar} 4 \sin \varphi t_{\mathbf{k}}^2 t_{\mathbf{q}}^2 N_L N_R \int d\epsilon_L \int d\epsilon_R u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} \frac{1}{\epsilon_d - E_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\epsilon_d - E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}}} . \quad (3.50)$$

Ponieważ otrzymana wartość  $I_C < 0$ , dla stanu  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$  otrzymujemy złącze Josephsona

$ \uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$	
Procesy rozdzielone	Procesy nierozdzielone
a)	b) $\left  \frac{\epsilon_d}{\Delta} \right  \ll 1$
c)	d)  $\left  \frac{\epsilon_d}{\Delta} \right  \gg 1$

Rysunek 3.7. Procesy tunelowania dla trypletowego stanu podstawowego kropek kwantowych. Linia przerywana oddziela procesy, które dominują w pobliżu położenia rezonansowego ( $|\epsilon_d/\Delta| \ll 1$ ) od procesów dających największy wkład do prądu poza położeniem rezonansowym ( $|\epsilon_d/\Delta| \gg 1$ ). Strzałkami oznaczone są procesy tunelowania elektronów, których kolejność oznaczona jest liczbami 1-4. W układzie następuje blokada rozdzielania par Coopera zarówno w pobliżu rezonansu (a) jak i poza położeniem rezonansowym (c). W procesach IV rzędu dozwolone są jedynie te, w których para Coopera tuneluje przez pojedynczą kropkę kwantową, a stan pośredni procesu tunelowania wiąże się z wzbudzeniem dwóch kwazicząstek. Proces ten daje największy wkład poza położeniem rezonansowym (d), a w pobliżu rezonansu wkład ten jest niewielki (b).

typu  $\pi$ . Można pokazać, że podobny wynik otrzymamy dla stanu podstawowego podwójnej kropki kwantowej  $|T\rangle_{DQD}$ , gdzie wkład od procesów rozdzielaających pary Coopera znosi się do zera i niezerowy wkład do prądu Josephsona otrzymujemy tylko z procesów, w których tunelowanie elektronów odbywa się w sposób nierozdzielony, przez jedną kropkę kwantową.

### 3.6. Sprawność rozdzielania par Coopera

Na podstawie otrzymanych wyrażeń na prąd Josephsona, (3.43), (3.44), (3.46) - (3.50) możemy obliczyć sprawność rozdzielania par Coopera, którą definiujemy jako stosunek prądu rozdzielonego do całkowitego prądu płynącego w układzie:

$$Eff. = \frac{I_{SPL}}{I_{SPL} + |I_{UNSPL}|} = \frac{1}{1 + \frac{|I_{UNSPL}|}{I_{SPL}}} . \quad (3.51)$$

Ze względu na blokadę prądu rozdzielonego w stanie podstawowym  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$ ,  $|\downarrow\downarrow\rangle_{DQD}$  i  $|T\rangle_{DQD}$  sprawność rozdzielania par Coopera wynosi 0, w całym dozwolonym zakresie energii poziomów kropek kwantowych. Zarówno dla stanu  $|S\rangle_{DQD}$ , jak i dla  $|0\rangle_{DQD}$  sprawność rozdzielania par Coopera w pobliżu rezonansu ( $|\epsilon_d/\Delta| \ll 1$ ) wynosi [65]:

$$Eff_{\cdot|S} = Eff_{\cdot|0} = 1, \quad (3.52)$$

gdyż dla  $|\epsilon_d| \rightarrow 0$  dominujący staje się wkład do prądu pochodzący od procesów rozdzielających pary Coopera, które są korzystniejsze energetycznie ze względu na wzbudzenie pojedynczej kwazicząstki w procesie tunelowania pary Coopera. W miarę oddalania się od rezonansu ( $|\epsilon_d/\Delta| \gg 1$ ), sprawność rozdzielania dla stanu  $|S\rangle_{DQD}$  dąży do wartości [65]:

$$Eff_{\cdot|S} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad (3.53)$$

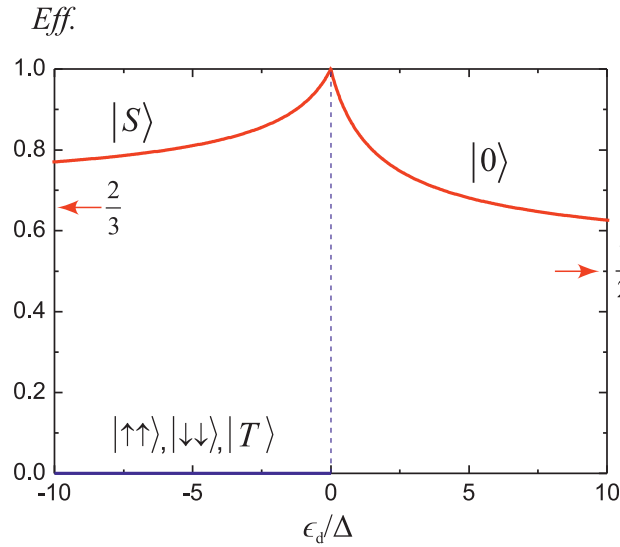
a dla stanu  $|0\rangle_{DQD}$  dąży do wartości:

$$Eff_{\cdot|0} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2}, \quad (3.54)$$

i związana jest z procesami, w których w stanach pośrednich mamy wzbudzenie dwóch kwazicząstek. Zależność sprawności rozdzielania od  $\epsilon_d/\Delta$  została przedstawiona na Rysunku 3.8.

### 3.7. Podsumowanie

W rozdziale przeanalizowano prąd Josephsona płynący w układzie podwójnej kropki kwantowej sprzężonej z dwoma elektrodami nadprzewodzącymi. Do obliczenia prądu wykorzystano niezdegenerowany, niezależny od czasu rachunek zaburzeń IV rzędu. W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano wyrażenia opisujące prąd Josephsona płynący przez układ w sposób rozdzielony i nierozdzielony, dla następujących stanów podstawowych kropek kwantowych: singletowego  $|S\rangle_{DQD}$ , nieobsadzonych kropek kwantowych  $|0\rangle_{DQD}$  oraz stanów trypletowych  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$ ,  $|\downarrow\downarrow\rangle_{DQD}$  i  $|T\rangle_{DQD}$ . Przedstawiono różne rodzaje procesów odpowiadających za transport elektronów przez złącze. Na podstawie otrzymanych wyrażeń na prąd Josephsona określono sprawność rozdzielania par Coopera w układzie. Pokazano, że odsunięcie poziomów energetycznych kropek kwantowych poza położenie rezonansowe pozwala na uzyskanie skorelowanego przepływu par elektronów



Rysunek 3.8. Sprawność rozdzielania par Coopera w układzie podwójnej kropki kwantowej sprzężonej z dwoma elektrodami nadprzewodzącymi, w funkcji energii poziomów energetycznych kropek kwantowych, dla możliwych stanów  $|S\rangle_{DQD}$ ,  $|0\rangle_{DQD}$  i  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$  (lub  $|\downarrow\downarrow\rangle_{DQD}$ ,  $|T\rangle_{DQD}$ ). W pobliżu rezonansowego położenia poziomów kropek kwantowych sprawność rozdzielania par Coopera wynosi 100% dla stanu singletowego  $|S\rangle_{DQD}$  i pustego  $|0\rangle_{DQD}$ . Poza położeniem rezonansowym sprawność rozdzielania par Coopera dąży do 66,6% i 50% odpowiednio dla stanu singletowego  $|S\rangle_{DQD}$  i stanu nieobsadzonych kropek kwantowych  $|0\rangle_{DQD}$ . Sprawność rozdzielania par Coopera dla stanów trypletowych  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$ ,  $|\downarrow\downarrow\rangle_{DQD}$ ,  $|T\rangle_{DQD}$  wynosi 0, w całym dozwolonym zakresie położenia poziomów energetycznych kropek kwantowych.

przez złącze Josephsona, przy jednoczesnym zachowaniu wysokiej sprawności rozdzielania par Coopera. Zarówno dla stanu singletowego  $|S\rangle_{DQD}$ , jak i dla stanu nieobsadzonych kropek kwantowych  $|0\rangle_{DQD}$  sprawność rozdzielania par Coopera wynosi 100% w pobliżu położenia rezonansowego. Poza położeniem rezonansowym sprawność rozdzielania par Coopera dąży do wartości 66,6% dla stanu singletowego oraz 50% dla stanu nieobsadzonych kropek kwantowych. Dla stanów trypletowych  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$ ,  $|\downarrow\downarrow\rangle_{DQD}$ ,  $|T\rangle_{DQD}$  niezerowy wkład do prądu otrzymujemy jedynie od procesów, w których para Coopera tuneluje w sposób nierozdzielony, zatem sprawność rozdzielania par Coopera dla tych stanów podstawowych wynosi zero. Dzięki przejściu do zakresu współtunelowania ułatwione zostaje wyodrębnianie splątanych par elektronów z nadprzewodnika. W zakresie sekwencyjnego tunelowania sprawność rozdzielania par Coopera jest idealna, jednakże nie mamy kontroli nad przepływem par elektronów. Przedstawione wyniki zakładają temperaturę  $T \rightarrow 0$ . Uwzględnienie skończonej temperatury prowadziłyby do wzbudzeń termicznych na kropkach kwantowych - możliwe nieelastyczne przejścia pomiędzy stanami singletowym i trypletowym,



---

oraz istotny byłby udział termicznie wzbudzonych kwazicząstek, których tunelowanie jest procesem II rzędu.



## Rozdział 4

# Lokalne i nielocalne efekty interferencyjne w złączu Josephsona

Odkryty w 1959 efekt Aharonova-Bohma [66] uwidacznia różnicę pomiędzy dynamiką klasyczną a kwantową. W klasycznej fizyce naładowana cząstka ulega wpływowi pola elektromagnetycznego tylko w obszarze, gdzie wartość natężenia pola elektrycznego lub magnetycznego jest różna od zera. W mechanice kwantowej oprócz natężenia pola elektromagnetycznego istotny jest również jego potencjał wektorowy  $\mathbf{A}$ . W zależności od toru ruchu wokół strumienia cząstka doświadcza zmiany fazy funkcji falowej wynoszącej:

$$\phi_{AB} = \frac{q}{\hbar} \int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} . \quad (4.1)$$

Na podstawie obecnych w równaniach Maxwella symetrii pomiędzy polem elektrycznym i magnetycznym, Aharonov i Casher [67] przewidzieli, że cząstka posiadająca moment magnetyczny  $\boldsymbol{\mu}$ , poruszająca się wokół linii strumienia ładunkowego doznaje przesunięcia fazowego zależnego od natężenia pola elektrycznego:

$$\phi_{AC} = \frac{1}{\hbar c^2} \int_L (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\mu}) \cdot d\mathbf{x} . \quad (4.2)$$

Efekt Aharonova-Cashera został oryginalnie zaproponowany dla cząstki neutralnej pod względem ładunku, ponieważ pole elektryczne zmienia tor ruchu naładowanej cząstki, w tym samym znaczeniu, jak oryginalny efekt Aharonova-Bohma zakładający brak pola magnetycznego w obszarze ruchu elektronu. Eksperyment interferencyjny Aharonova-Cashera został pokazany przez Cimmino i współpracowników [68], gdzie zademonstrowano interferencję neutronów w pętli, gdzie do wytworzenia pola elektrycznego użyto napięcia 45kV. Jednakże w eksperymencie, precesję spinu neutronu zmodyfikowano jedynie o 2.2mrad, ze względu na słabe oddziaływanie spin-orbita w próżni. Mathur i Stone [69] zaproponowali eksperyment dla elektronów w mezoskopowej pętli interferencyjnej wyko-

nanej w dwuwymiarowym gazie elektronowym GaAs, w obecności oddziaływań spin-orbita Dresselhausa [70]. Obserwowany efekt był tysiące razy większy, w porównaniu do poprzedniego eksperymentu, ze względu na dużo większe oddziaływania spin-orbita w półprzewodnikach, w porównaniu do próżni.

W literaturze można znaleźć analizę wpływu efektów Aharonova-Bohma i Aharonova-Cashera na prąd Josephsona w układach złącz Josephsona z pierścieniem półprzewodnikowym z oddziaływaniem spin-orbita Rashby [71, 72, 73] lub w układach z kropką kwantową [74]. W niniejszym rozdziale przedstawiony zostanie odmienny wpływ wymienionych efektów na prąd Josephsona w przypadku, gdy pary Coopera tunelują przez układ w sposób rozdzielony i nierozdzielony.

#### 4.1. Oddziaływanie spin-orbita Rashby

Podstawą efektu Aharonova-Cashera jest oddziaływanie pola elektrycznego z momentem magnetycznym poprzez oddziaływanie spin-orbita. Oddziaływanie spin-orbita jest relatywistycznym wpływem na cząstkę obdarzoną spinem poruszającą się z prędkością  $\mathbf{v}$  przez pole elektryczne  $\mathbf{E}$ . W układzie odniesienia cząstki, natężenie pola elektrycznego może być przekształcone w pole magnetyczne  $\mathbf{B}$  prostopadłe do kierunku pola elektrycznego oraz kierunku ruchu cząstki:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} = -\frac{\mathbf{p} \times \mathbf{E}}{m_0 c^2}, \quad (4.3)$$

gdzie  $c$  oznacza prędkość światła,  $m_0$  masę elektronu,  $\mathbf{v}$  prędkość elektronu. Podobnie jak w przypadku efektu Zeemana, oddziaływania spin-orbita dane jest poprzez iloczyn skalarny momentu magnetycznego oraz pola magnetycznego, co można zapisać:

$$H_{SO} = -\mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{E}}{2m_0 c^2} \right), \quad (4.4)$$

gdzie  $\mu_B$  i  $\boldsymbol{\sigma}$  oznaczają odpowiednio magneton Bohra i wektor macierzy Pauliego. Czynniki  $1/2$  pojawiający się w równaniu (4.4) wynika z efektów relatywistycznych. Oddziaływanie spin-orbita jest małe i zanedbywalne dla pędu nierelatywistycznego  $p = \hbar k \ll m_0 c$ . Jednakże jest ono bardzo wzmocnione w półprzewodnikach z przerwą energetyczną.

Uwięzienie elektronów w dwuwymiarowym gazie elektronowym jest możliwe dzięki kwantowej studni potencjału. Przyłożenie zewnętrznego napięcia prostopadłe do płaszczyzny gazu elektronowego powoduje powstanie asymetrii studni potencjału, co w następ-

stwie prowadzi do zniesienia degeneracji (rozszczenia) spinów. Efekt ten nazywany jest oddziaływaniem spin-orbita Rashby [75, 76]. Hamiltonian Rashby dla dwuwymiarowego gazu elektronowego (w płaszczyźnie  $xz$ ) w asymetrycznej studni potencjału ma postać:

$$H_R = \frac{\alpha_R}{\hbar} (\sigma_z k_x - \sigma_x k_z) , \quad (4.5)$$

gdzie  $\alpha_R$  jest parametrem spin-orbita Rashby. Jeżeli ruch elektronu ograniczymy do kierunku  $x$ ,  $k_z = 0$ ,  $k_x \neq 0$ , hamiltonian Rashby (4.5) przyjmie postać:

$$H_R = \frac{\alpha_R}{\hbar} \sigma_z k_x . \quad (4.6)$$

Oddziaływanie spin-orbita Rashby powoduje, że elektrony o polaryzacji  $+z$  i  $-z$ , o tej samej energii, mogą mieć różne wektory falowe. Efekt Rashby zmienia energię elektronów  $+z$  i  $-z$  odpowiednio:

$$E(+z) = \frac{\hbar^2 k_{x1}^2}{2m^*} - \alpha k_{x1} , \quad (4.7)$$

$$E(-z) = \frac{\hbar^2 k_{x2}^2}{2m^*} + \alpha k_{x2} . \quad (4.8)$$

Konsekwencją różnych wektorów falowych dla spinów  $+z$  i  $-z$  jest różna zależność fazowa dla poszczególnych spinów:

$$|+z\rangle \rightarrow e^{ik_{x1}L} |+z\rangle = e^{i\phi_{+z}} |+z\rangle , \quad (4.9)$$

$$|-z\rangle \rightarrow e^{ik_{x2}L} |-z\rangle = e^{i\phi_{-z}} |-z\rangle , \quad (4.10)$$

gdzie  $L$  oznacza długość kanału transportowego. Podstawiając:

$$\frac{1}{2} (\phi_{+z} + \phi_{-z}) = \phi_0 , \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{2} (\phi_{+z} - \phi_{-z}) = \phi , \quad (4.12)$$

można pokazać, że faza poruszającego się elektronu zależna jest od spinu:

$$|\sigma\rangle_z \rightarrow e^{i\phi_0} e^{i\sigma\phi} |\sigma\rangle_z \rightarrow e^{i\sigma\phi} |\sigma\rangle_z , \quad (4.13)$$

gdzie wspólny czynnik fazowy  $e^{i\phi_0}$  może zostać pominięty. Zatem oddziaływanie spin-orbita Rashby powoduje, że spin elektronu, poruszający się wzdłuż kierunku  $x$ , dla pola

elektrycznego przyłożonego wzdłuż kierunku  $y$  doznaje precesji wokół kierunku  $z$ . Efekt oddziaływania Rashby można porównać do obrotu spinu wokół osi  $z$ , będącej kierunkiem pewnego efektywnego pola magnetycznego.

Oddziaływanie spin-orbita Rashby, ma duże znaczenie w spintronice, ze względu na możliwość kontroli siły tego oddziaływania poprzez lokalne pole elektryczne uzyskiwane przez przyłożenie napięcia na bramce powyżej dwuwymiarowego gazu elektronowego. Przykładem może być wykorzystanie oddziaływań spin-orbita Rashby do wytworzenia tranzystora polowego, zaproponowanego przez S. Datta i B. Das [77].

## 4.2. Złącze Josephsona z podwójną kropką kwantową

Pierwszym rozpatrywanym układem jest układ dwóch nadprzewodzących elektrod połączonych z podwójną kropką kwantową za pomocą drutów kwantowych [78, 79], w których istnieje oddziaływanie spin-orbita Rashby, w obecności zewnętrznego pola magnetycznego i elektrycznego (Rysunek 4.1). Układ ten ma formę zamkniętego pierścienia, o rozmiarze mniejszym niż długość koherencji par Coopera, w którym można spodziewać się różnych efektów interferencyjnych. Efekty interferencyjne dla prądu Josephsona w układzie podwójnej kropki kwantowej, wynikające z obecności strumienia magnetycznego zostały już przeanalizowane przez Z. Wang i X. Hu. Przedstawioną w pracy [72] analizę uzupełniamy o wpływ oddziaływania spin-orbita Rashby.

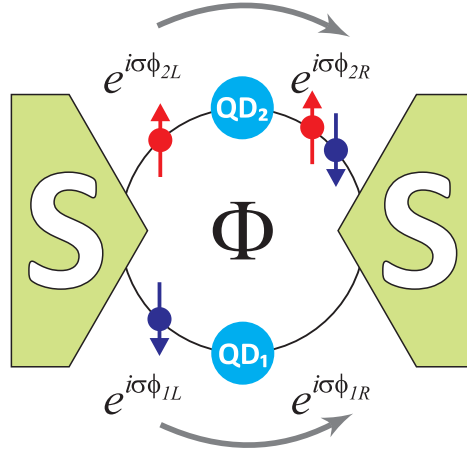
Hamiltonian elektrod oraz kropek kwantowych dany jest równaniami (3.12) i (3.3). Zmieniony zostaje hamiltonian tunelowy, który efektywnie modeluje zmianę fazy funkcji falowej elektronu płynącego przez druty kwantowe łączące kropki kwantowe z elektrodami. Hamiltonian składa się z dwóch części,  $H_T = H_{T1} + H_{T2}$ , odpowiadających tunelowaniu elektronów przez  $\alpha = 1, 2$  kropkę kwantową [72, 80, 81]:

$$H_{T1} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} e^{i(2\pi\Phi/4\Phi_0)} e^{i\sigma\phi_{1L}} t_{L\mathbf{k}}^* d_{1\sigma}^\dagger \times (u_{\mathbf{k}}\gamma_{L\mathbf{k}\sigma} + \sigma v_{\mathbf{k}}\gamma_{L\mathbf{k}\bar{\sigma}}) + \sum_{\mathbf{k}\sigma} e^{i(2\pi\Phi/4\Phi_0)} e^{i\sigma\phi_{1R}} t_{R\mathbf{k}} \times (u_{\mathbf{k}}\gamma_{R\mathbf{k}\sigma} + \sigma v_{\mathbf{k}}\gamma_{R\mathbf{k}\bar{\sigma}}) d_{1\sigma} + h.c. , \quad (4.14)$$

$$H_{T2} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} e^{-i(2\pi\Phi/4\Phi_0)} e^{i\sigma\phi_{2L}} t_{L\mathbf{k}}^* d_{2\sigma}^\dagger \times (u_{\mathbf{k}}\gamma_{L\mathbf{k}\sigma} + \sigma v_{\mathbf{k}}\gamma_{L\mathbf{k}\bar{\sigma}}) + \sum_{\mathbf{k}\sigma} e^{-i(2\pi\Phi/4\Phi_0)} e^{i\sigma\phi_{2R}} t_{R\mathbf{k}} \times (u_{\mathbf{k}}\gamma_{R\mathbf{k}\sigma} + \sigma v_{\mathbf{k}}\gamma_{R\mathbf{k}\bar{\sigma}}) d_{2\sigma} + h.c. , \quad (4.15)$$

gdzie  $\Phi$  jest strumieniem pola magnetycznego,  $\Phi_0 = h/e$  jest kwantem strumienia magne-

tycznego, a  $\sigma\phi_{\alpha l}$  oznacza zależną od spinu fazę wynikającą z efektu Rashby, którą zyskuje elektron poruszający się przez nanodrut łączący elektrody z kropkami kwantowymi. Ponieważ układ może być niesymetryczny (np. z powodu różnej długości drutów kwantowych) do czynników fazowych wprowadzono oznaczenia indeksami  $\alpha L$ ,  $\alpha R$  odpowiadającymi poszczególnym ramionom układu.



Rysunek 4.1. Układ podwójnej kropki kwantowej w obecności strumienia pola magnetycznego  $\Phi$  i pola elektrycznego. Kropki kwantowe połączone są z elektrodami nadprzewodzącymi drutami kwantowymi z oddziaływaniem spin-orbita Rashby. Przepływające przez nanodruty elektrony zyskują zależną od spinu fazę funkcji falowej  $e^{i\sigma\phi_{\alpha l}}$ , związaną z precesją spinu elektronu wynikającą z oddziaływania spin-orbita,  $\alpha = 1, 2$  oznacza kropkę kwantową,  $\alpha l = \alpha L, \alpha R$  oznacza nanodrut łączący kropkę kwantową  $\alpha$  z lewą lub prawą elektrodą. Pary Coopera mogą tunelować przez układ zarówno w sposób nierozdzielony, jak i rozdzielony.

Rozpatrzmy układ w stanie podstawowym  $|0\rangle_{DQD}$ . Procedura obliczenia prądu Josephsona jest taka sama jak dla przypadku bez pola magnetycznego i elektrycznego, liczba dozwolonych procesów nie zmienia się. Dla uproszczenia analizy zakładamy istnienie oddziaływania spin-orbita tylko w jednym ramieniu układu  $\phi_{2L} = \phi_L$  i  $\phi_{1L} = \phi_{1R} = \phi_{2R} = 0$ . W rezultacie przeprowadzonych obliczeń otrzymujemy wyrażenie na prąd Josephsona [82]:

$$I_J = I_{UNSP\bar{L}} \cos \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} + I_{SPL} \cos \phi_L, \quad (4.16)$$

gdzie  $I_{SPL}$  oraz  $I_{UNSP\bar{L}}$  dane są odpowiednio równaniami (3.46) i (3.47). Równanie (4.16) pokazuje, że efekt strumienia pola magnetycznego  $\Phi$  i oddziaływania spin-orbita mają wpływ na różne składowe prądu Josephsona, które zmieniają się z funkcją cosinus odpowiedniej fazy. Przeanalizujemy tunelowanie pary Coopera przez kropkę kwantową oznaczoną  $\alpha = 2$ . Para Coopera składa się z dwóch elektronów o przeciwnych spinach w stanie singletowym  $|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ . Pojedynczy elektron tunelując przez kropkę kwan-

ową zyskuje fazę zależną od spinu równą  $\sigma\phi_L$ :

$$|\uparrow\rangle \rightarrow e^{i\phi_L} |\uparrow\rangle , \quad (4.17)$$

$$|\downarrow\rangle \rightarrow e^{-i\phi_L} |\downarrow\rangle . \quad (4.18)$$

Zatem stan pary Coopera, tunelującej w sposób nierozdzielony przez kropkę kwantową nr 2, nie ulegnie zmianie:

$$|S\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{i\phi_L} e^{-i\phi_L} |\uparrow\downarrow\rangle - e^{-i\phi_L} e^{i\phi_L} |\downarrow\uparrow\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) = |S\rangle , \quad (4.19)$$

natomiast gdy para tuneluje w sposób rozdzielony czynnik fazowy pojawia się tylko dla jednego elektronu płynącego przez kropkę nr 2:

$$|S\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{i\phi_L} |\uparrow\downarrow\rangle - e^{-i\phi_L} |\downarrow\uparrow\rangle \right). \quad (4.20)$$

Całkowita różnica fazy wynikająca z oddziaływania spin-orbita Rashby będzie różna od zera, ponieważ tylko jeden elektron z pary będzie ulegać jej wpływowi. Zatem efekt oddziaływania spin-orbita Rashby możemy obserwować tylko dla rozdzielonych par Coopera.

Faza wynikająca z obecności strumienia pola magnetycznego ma różny znak w zależności od wyboru drogi tunelowania elektronu. Jeżeli elektron o spinie  $\sigma$  tuneluje przez pierwszą kropkę kwantową, to wówczas zyskuje fazę:

$$|\sigma\rangle_1 \rightarrow e^{i(2\pi\Phi/2\Phi_0)} |\sigma\rangle_1 , \quad (4.21)$$

a gdy tuneluje przez drugą kropkę kwantową:

$$|\sigma\rangle_2 \rightarrow e^{-i(2\pi\Phi/2\Phi_0)} |\sigma\rangle_2 . \quad (4.22)$$

W rezultacie, gdy para Coopera tuneluje przez układ w sposób rozdzielony otrzymujemy:

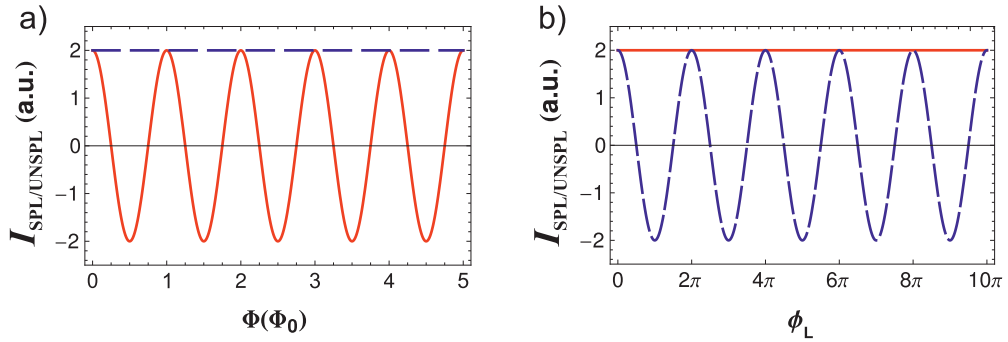
$$|S\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{i(2\pi\Phi/2\Phi_0)} e^{-i(2\pi\Phi/2\Phi_0)} |\uparrow\downarrow\rangle - e^{i(2\pi\Phi/2\Phi_0)} e^{-i(2\pi\Phi/2\Phi_0)} |\downarrow\uparrow\rangle \right) = |S\rangle , \quad (4.23)$$



a gdy para tuneluje przez jedną kropkę kwantową:

$$|S\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{\pm i(2\pi\Phi/2\Phi_0)} e^{\pm i(2\pi\Phi/2\Phi_0)} |\uparrow\downarrow\rangle - e^{\pm i(2\pi\Phi/2\Phi_0)} e^{\pm i(2\pi\Phi/2\Phi_0)} |\downarrow\uparrow\rangle \right) = e^{\pm i(2\pi\Phi/\Phi_0)} |S\rangle . \quad (4.24)$$

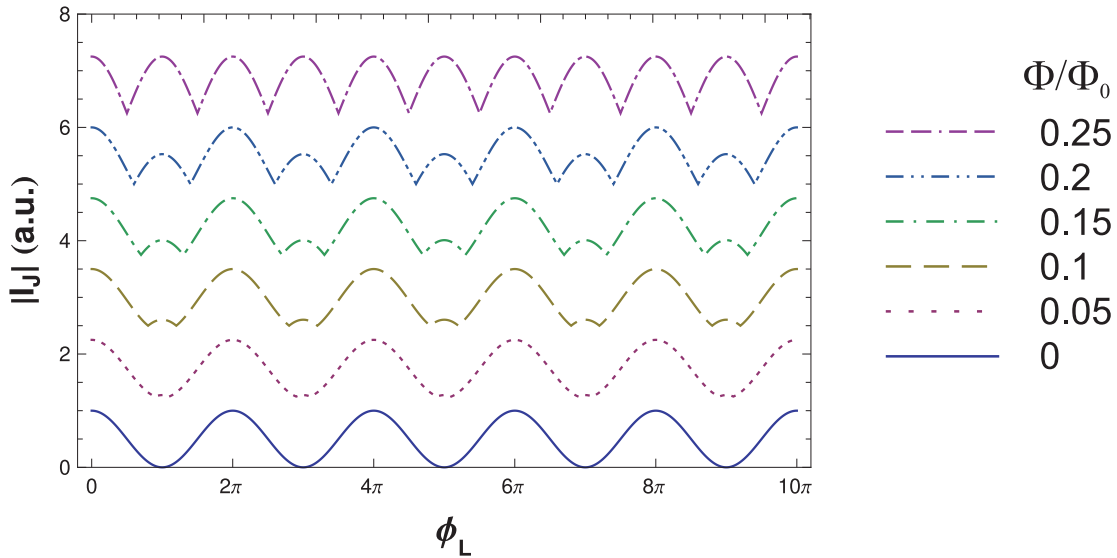
Zależność składowych rozdzielonej i nierozdzielonej prądu Josephsona od strumienia pola magnetycznego  $\Phi$  została pokazana na Rysunku 4.2(a), dla sprawności rozdzielania par Coopera  $Eff. = 50\%$  oraz różnicy faz parametru porządku nadprzewodzących elektrod  $\varphi = \pi/2$ ,  $\phi_L = 0$ . Rysunek 4.2(b) przedstawia zależność składowych prądu Josephsona od fazy Rashby  $\phi_L$  w nieobecności strumienia magnetycznego. Linia czerwona ciągła odpowiada składowej  $I_{UNSP} \cos \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}$ , a linia niebieska kreskowana składowej  $I_{SPL} \cos \phi_L$ . Rysunki 4.3 i 4.4 przedstawiają wpływ obu efektów na prąd Josephsona. Na



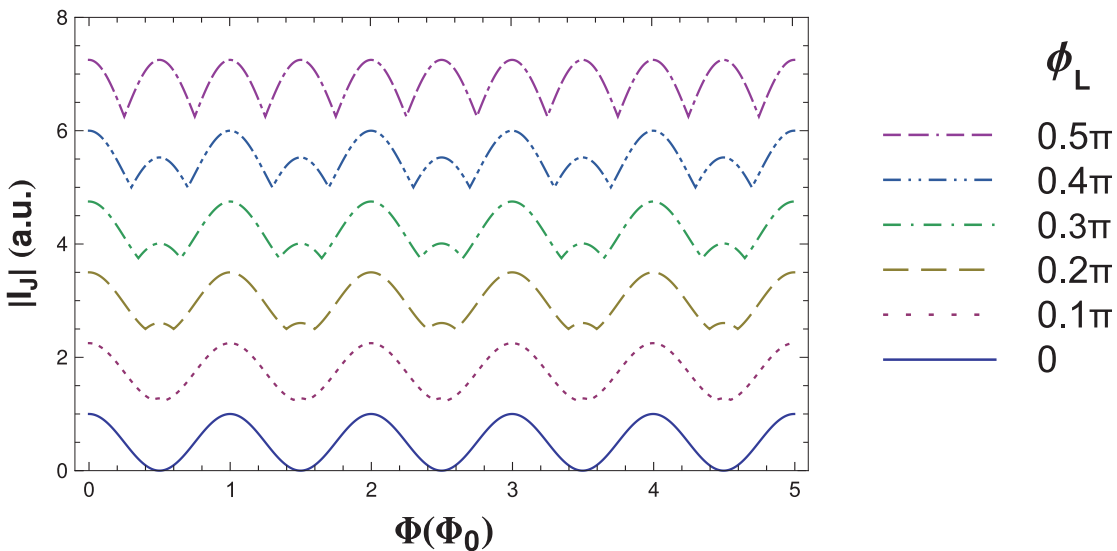
Rysunek 4.2. Porównanie wpływu: a) strumienia pola magnetycznego  $\Phi$ , dla  $\phi_L = 0$  i b) oddziaływania spin-orbita Rashby (zależność od fazy  $\phi_L$ , dla  $\Phi = 0$ ) na składowe rozdzielone (linia przerywana) i nierozdzielone (linia ciągła) prądu Josephsona, dla układu, w którym sprawność rozdzielania par Coopera wynosi  $Eff. = 50\%$ , a różnica faz parametru porządku nadprzewodzących elektrod  $\varphi = \pi/2$ .

pierwszym z nich przedstawiono zależność prądu Josephsona od fazy Rashby dla różnych wartości strumienia pola magnetycznego. Zwiększanie strumienia pola magnetycznego od zera do  $\Phi_0/4$  powoduje zmianę okresu oscylacji prądu Josephsona w funkcji fazy Rashby z  $2\pi$  do  $\pi$ . Wzrost strumienia pola magnetycznego do wartości  $\Phi_0/2$  powoduje powrót do okresu  $2\pi$ . Z dalszym wzrostem  $\Phi$  cykl zmian okresu oscylacji ulega powtarzaniu. Na Rysunku 4.4 przedstawiono zależność prądu Josephsona od strumienia pola magnetycznego dla różnych wartości fazy Rashby. W zależności od fazy Rashby okres oscylacji prądu Josephsona zmienia się między  $\Phi_0$  a  $\Phi_0/2$ .

Ciekawy efekt możemy zaobserwować w układzie, w którym mamy możliwość kontroli fazy Rashby po obu stronach kropki kwantowej ( $\phi_{2L} = \phi_L$ ,  $\phi_{2R} = \phi_R$ ,  $\phi_{1L} = \phi_{1R} = 0$ ) dla singletowego stanu podstawowym kropek kwantowych. Podobnie jak dla  $|0\rangle_{DQD}$  tylko rozdzielona składowa prądu Josephsona podatna będzie na efekt Rashby, a strumień pola



Rysunek 4.3. Zależność prądu Josephsona od fazy wynikającej z oddziaływania spin-orbita Rashby, która może być zmieniana polem elektrycznym, dla różnych wartości strumienia pola magnetycznego. Zmiana wielkości strumienia pola magnetycznego powoduje zmianę okresu oscylacji prądu Josephsona między  $2\pi$  i  $\pi$ . Krzywe przedstawiono na wykresie z przesunięciem o 1.25. Sprawność rozdzielania par Coopera  $Eff. = 50\%$ , a różnica faz parametru porządku nadprzewodzących elektrod  $\varphi = \pi/2$ .



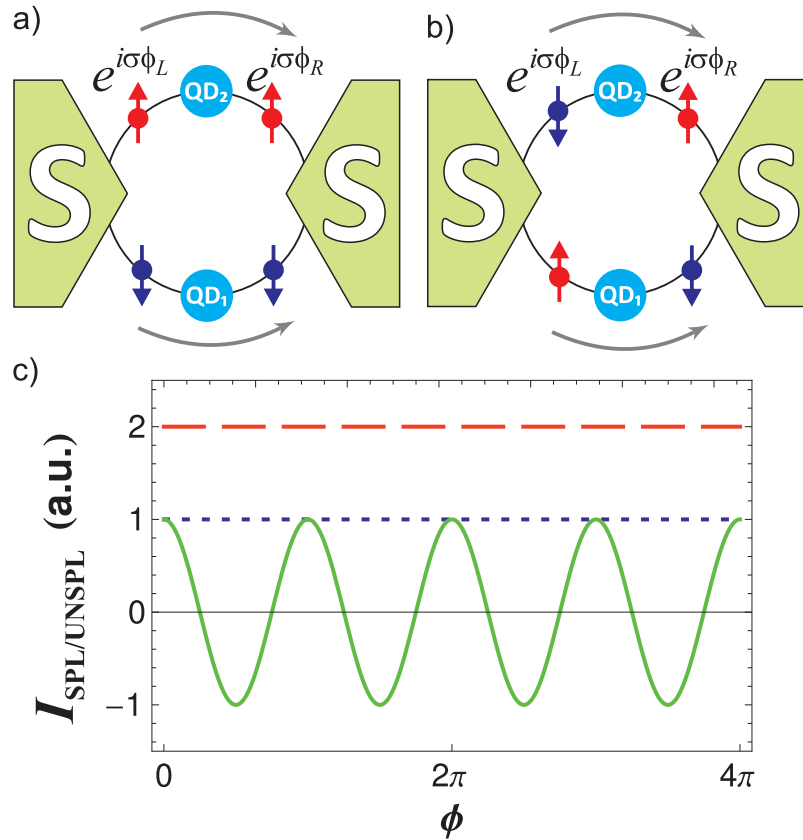
Rysunek 4.4. Zależność prądu Josephsona od strumienia pola magnetycznego  $\Phi$  dla różnych wartości fazy wynikającej z oddziaływania spin-orbita Rashby, która może być zmieniana polem elektrycznym. Zmiana fazy Rashby powoduje zmianę okresu oscylacji prądu Josephsona między  $\Phi_0$  i  $\Phi_0/2$ . Krzywe przedstawiono na wykresie z przesunięciem o 1.25. Sprawność rozdzielania par Coopera  $Eff. = 50\%$ , a różnica faz parametru porządku nadprzewodzących elektrod  $\varphi = \pi/2$ .

magnetycznego będzie wpływał wyłącznie na nierozdzielone procesy tunelowania. Jednakże tunelowanie w sposób rozdzielony może przebiegać na dwa sposoby. W pierwszym przypadku para elektronów opuszczająca kropki kwantowe zostaje zastąpiona elektronami o zgodnych spinach (Rysunek 4.5(a)). W drugim przypadku elektrony tunelujące na kropki kwantowe mają spiny przeciwne w porównaniu do elektronów, które opuściły podwójną

kropkę kwantową (Rysunek 4.5(b)). Prowadzi to do następującego wyrażenia na prąd Josephsona [82]:

$$I_J = I_{UNSP} \cos \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} + \frac{1}{2} I_{SPL} \cos(\phi_L + \phi_R) + \frac{1}{2} I_{SPL} \cos(\phi_L - \phi_R), \quad (4.25)$$

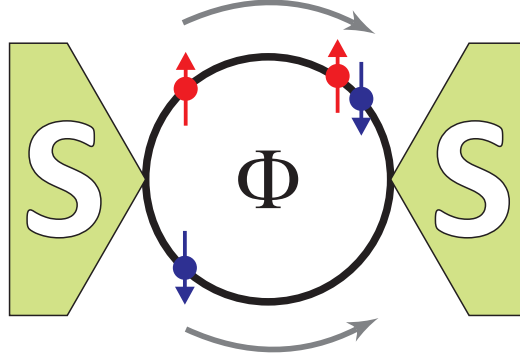
gdzie  $I_{SPL}$  oraz  $I_{UNSP}$  dane są równaniami (3.43) i (3.44). W rezultacie dla przypadku symetrycznego, tzn. gdy  $\phi_L = \phi_R = \phi$  tylko połowa prądu rozdzielonego będzie zależna od fazy Rashby (Rysunek 4.5(c)). Linia czerwona kreskowana odpowiada składowej  $I_{UNSP} \cos \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}$ , linia niebieska kropkowana oraz linia zielona ciągła odpowiadają składowej odpowiednio niezależnej  $\frac{I_{SPL}}{2}$  i zależnej od fazy Rashby  $\frac{I_{SPL}}{2} \cos \phi$ .



Rysunek 4.5. Możliwe rodzaje tunelowania elektronów w sposób rozdzielony oraz zależność prądu Josephsona od fazy Rashby ( $\phi = \phi_L = \phi_R$ ). Elektrony opuszczające kropki kwantowe mogą być zastąpione parą elektronów o zgodnych (a) bądź przeciwnych spinach (b). W rezultacie dla symetrycznego układu, tylko połowa prądu rozdzielonego będzie zależna od fazy Rashby (c). Prąd rozdzielony zależny od fazy Rashby oznaczony jest linią ciągłą, linia kropkowana odpowiada składowej rozdzielonej niezależnej od  $\phi$ . Linia kreskowana odpowiada składowej nierozdzielonej prądu Josephsona, sprawność rozdzielania par Coopera  $Eff. = 50\%$ , a różnica faz parametru porządku nadprzewodzących elektrod  $\varphi = \pi/2$ .

### 4.3. Złącze Josephsona z pierścieniem półprzewodnikowym

Dla sprawdzenia czy otrzymane w poprzednim podrozdziale wyniki są zależne od geometrii układu, zostanie przeanalizowany układ złącza Josephsona z pierścieniem półprzewodnikowym, bez kropek kwantowych, umieszczonym pomiędzy elektrodami nadprzewodzącymi (Rysunek 4.6). Układ taki jest odmianą interferometru Aharonova-Bohma i jest on często analizowany w literaturze [71, 72, 73]. Zakładamy, że nasz pierścień jest jednowymiarowy i symetrycznie sprzężony z nadprzewodnikami.



Rysunek 4.6. Złącze Josephsona z pierścieniem półprzewodnikowym, bez kropek kwantowych, z silnym oddziaływaniem spin-orbita Rashby, w obecności strumienia pola magnetycznego. Pary Coopera mogą przepływać przez układ zarówno w sposób rozdzielony, jak i nierozdzielony.

Hamiltonian pierścienia o promieniu  $r_0 < \xi$ , w obecności prostopadłego pola magnetycznego oraz sprzężenia typu Rashby ma postać [83, 84]:

$$H_{ring} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \left( -i\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 + \frac{\hbar\omega_B}{2} \sigma_z + \frac{\hbar\omega_R}{2} (\cos\theta\sigma_x + \sin\theta\sigma_y) \left( -i\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) - i\frac{\hbar\omega_R}{4} (\cos\theta\sigma_y - \sin\theta\sigma_z), \quad (4.26)$$

gdzie  $\theta$  oznacza kąt azymutalny, częstości mają postać  $\omega_0 = \hbar/(m^*r_0^2)$ ,  $\omega_R = 2\alpha_R/(\hbar r_0)$  oraz  $\omega_B = 2\mu B/\hbar$ . Stałe  $\alpha_R$  i  $\mu$  oznaczają odpowiednio stałe sprzężeń spin-orbita Rashby i Zeemana cząstki o masie efektywnej  $m^*$  w polu magnetycznym  $B$ . W dalszej części podrozdziału dla uproszczenia zakładamy brak pola magnetycznego  $\omega_B = 0$ . Funkcje własne hamiltonianu (4.26) mają postać:

$$\Psi_{+,n}^\uparrow(\theta) = \exp(in_+^\uparrow\theta) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\gamma/2 \\ -e^{i\theta}\sin\gamma/2 \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

$$\Psi_{+,n}^\downarrow(\theta) = \exp(in_+^\downarrow\theta) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin\gamma/2 \\ e^{i\theta}\cos\gamma/2 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

$$\Psi_{-,n}^{\uparrow}(\theta) = \exp(-in_{-}^{\uparrow}\theta) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \gamma/2 \\ -e^{i\theta} \sin \gamma/2 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\Psi_{-,n}^{\downarrow}(\theta) = \exp(-in_{-}^{\downarrow}\theta) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin \gamma/2 \\ e^{i\theta} \cos \gamma/2 \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

gdzie  $\uparrow, \downarrow$  oznacza spin elektronu, znak  $+/-$  oznacza kierunek ruchu elektronów, a  $n_{\lambda}^s$  jest orbitalną liczbą kwantową. Spinowe stany własne hamiltonianu nie są równoległe do wypadkowego kierunku pola magnetycznego i są określone przez kąt odchylenia  $\gamma$ . Energie własne zależące od kierunku spinu  $s$  oraz kierunku ruchu elektronów  $\lambda$  dane są równaniem:

$$E_{\lambda,n}^s = \frac{\hbar\omega_0}{2} \left[ \left( \lambda n_{\lambda}^s + \frac{\Phi}{\Phi_0} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} - s\lambda \left| \lambda n_{\lambda}^s + \frac{\Phi}{\Phi_0} + \frac{1}{2} \right| \sqrt{1 + Q_R^2} \right], \quad (4.31)$$

gdzie parametr  $Q_R = \omega_R/\omega_0$  określa siłę oddziaływania spin-orbita. W analizowanym układzie zaniedbujemy wsteczne rozpraszanie prowadzące do zjawisk rezonansowych. Miejsce wejścia elektronów do pierścienia definiujemy dla  $\theta = 0$ , zaś współrzędną  $\theta = \pi$  określony jest punkt wyjścia elektronów z pierścienia. Elektrony opuszczają pierścień w stanie spinowym:

$$|\sigma_{out}\rangle = \sum_{\lambda,s} |\Psi_{\lambda,n}^s(\pi)\rangle \langle \Psi_{\lambda,n}^s(0)|\sigma\rangle. \quad (4.32)$$

W naszym układzie, w celu obliczenia prądu, stosujemy przybliżenie, polegające na traktowaniu przepływu elektronów przez pierścień jako tunelowanie elektronów przez złącze Josephsona, gdzie obecność pierścienia wpływa w odpowiedni sposób na fazy funkcji falowych elektronów i może być opisane efektywnym hamiltonianem:

$$H_T = \sum_{\mathbf{k}\sigma\sigma'} t_{\mathbf{k}\sigma\sigma'} \left( u_{\mathbf{k}} \gamma_{R\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} + \sigma v_{\mathbf{k}} \gamma_{R\mathbf{k}\bar{\sigma}} \right) \left( u_{\mathbf{k}} \gamma_{L\mathbf{k}\sigma'} + \sigma' v_{\mathbf{k}} \gamma_{L\mathbf{k}\bar{\sigma}'}^{\dagger} \right) + h.c. . \quad (4.33)$$

Tutaj elementy macierzy tunelowania uwzględniają zmianę stanu spinowego  $t_{\mathbf{k}\sigma\sigma'} = \langle \sigma | \sigma'_{out} \rangle$ .

Do obliczenia prądu Josephsona wykorzystujemy drugi rząd rachunku zaburzeń. W rezultacie otrzymujemy następujące wyrażenie na prąd Josephsona [82]:

$$\begin{aligned} I_J &= \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial E_{gs}^{(2)}}{\partial \varphi} = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi} \langle gs | H_T \frac{1 - P_n}{E^{(0)} - H_0} H_T | gs \rangle = \\ &= \frac{I_r}{2} \sin(\varphi) \left( \cos \pi (n_{+}^{\uparrow} + n_{+}^{\downarrow}) + \cos \pi (n_{-}^{\downarrow} + n_{-}^{\uparrow}) \right) \\ &+ \frac{I_r}{2} \sin(\varphi) \left( \cos \pi (n_{+}^{\downarrow} + n_{+}^{\uparrow}) + \cos \pi (n_{-}^{\uparrow} + n_{-}^{\downarrow}) \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Rozwiązując równanie  $E_{\lambda,n}^s = E_F$  ze względu na  $n_\lambda^s$ , przy założeniu  $n_\lambda^s > 0$  otrzymujemy [82]:

$$I_J = I_r \sin \varphi \cos \pi \left( 2 \frac{\Phi}{\Phi_0} + 1 \right) \cos \pi \left( \sqrt{Q_R^2 + \delta} \right) + I_r \sin \varphi \cos \pi \left( \sqrt{1 + Q_R^2} \right) \cos \pi \left( \sqrt{Q_R^2 + \delta} \right), \quad (4.35)$$

gdzie  $I_r = \int d\varepsilon_k N_k u_k^2 v_k^2 / (2E_k)$  oraz  $\delta = 8E_F / (\hbar\omega_0) \gg Q_R$ . Wyrażenie na prąd Josephsona może być podzielone na dwie części. Oba wkłady do prądu Josephsona zależą od  $\cos \pi \left( \sqrt{Q_R^2 + \delta} \right)$ . Rozkładając w szereg Taylora wyrażenie  $\sqrt{Q_R^2 + \delta}$  otrzymujemy:

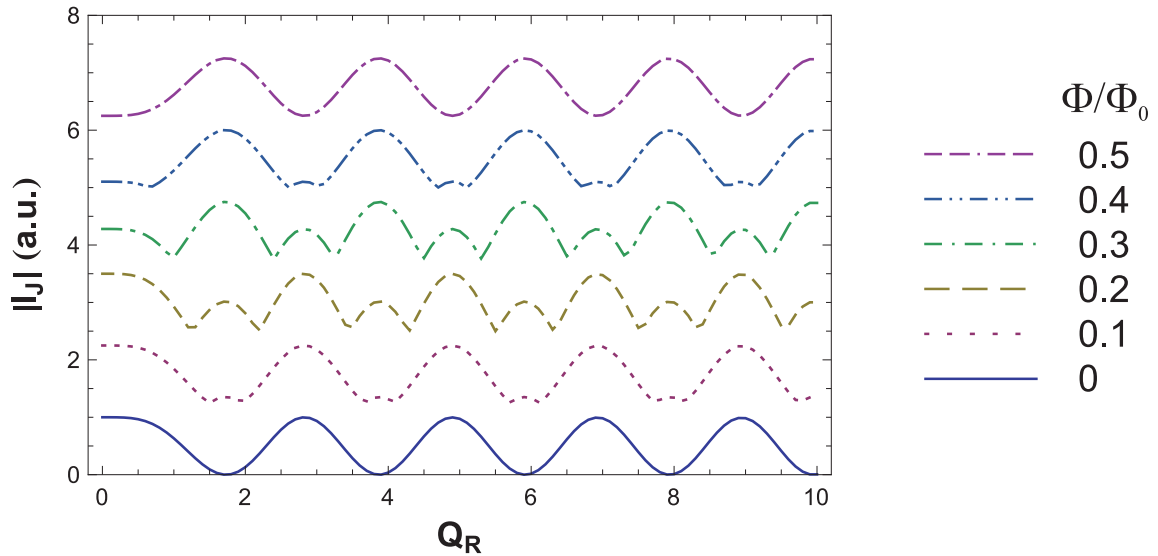
$$\sqrt{Q_R^2 + \delta} = \sqrt{\delta} + \frac{Q_R^2}{2\sqrt{\delta}} + \dots \quad (4.36)$$

Ponieważ  $\delta \gg Q_R$  (typowe wartości eksperymentalne  $\delta/Q_R \propto 10^5$ ) drugi (i kolejne) wyrazy szeregu (4.36) można uznać za zanedbywalne. Zatem dla obu składowych prądu Josephsona otrzymujemy dodatkowe (jednakowe) przesunięcie fazowe krzywych prądu  $\cos \pi \sqrt{\delta}$ . Rysunek 4.7 przedstawia zmianę okresu oscylacji prądu Josephsona w funkcji  $Q_R$  w zależności od strumienia pola magnetycznego.

Pierwsza ze składowych prądu Josephsona związana jest z tunelowaniem elektronów pary Coopera poprzez jedno ramię pierścienia i jest zależne od strumienia pola magnetycznego  $\propto \cos \pi \left( 2 \frac{\Phi}{\Phi_0} + 1 \right)$ . Drugi wkład do prądu Josephsona zależny jest od oddziaływań spin-orbita Rashby  $\propto \cos \pi \left( \sqrt{1 + Q_R^2} \right)$  i odpowiada procesom, w których elektrony pary tunelują przez pierścień w sposób rozdzielony. Dla  $Q_R \gg 1$  otrzymujemy związek pomiędzy fazą Rashby  $\phi_L$  przedstawioną w poprzednim podrozdziale, a parametrem  $Q_R$ ,  $\phi_L = \pi Q_R$ .

#### 4.4. Podsumowanie

W rozdziale przeanalizowano wpływ oddziaływań spin-orbita Rashby oraz strumienia pola magnetycznego na prąd Josephsona płynący w układach podwójnej kropki kwantowej lub półprzewodnikowego pierścienia sprzężonych z dwoma elektrodami nadprzewodzącymi. Dla obu układów złącz Josephsona uzyskano zgodne wyniki, pokazujące odmienny wpływ strumienia pola magnetycznego i oddziaływań spin-orbita Rashby na prąd płynący w układzie. W zależności od wyboru drogi tunelowania pary Coopera układ staje się wrażliwy na obecność strumienia pola magnetycznego (gdy para tuneluje w sposób



Rysunek 4.7. Zależność prądu Josephsona od oddziaływania spin-orbita Rashby  $Q_R$ , dla różnych wartości strumienia pola magnetycznego. Krzywe przedstawiono na wykresie z przesunięciem o 1.25.

nirozdzielony) lub wpływ na tunelowanie pary ma zależne od spinu oddziaływanie spin-orbita Rashby (gdy para elektronów tuneluje w sposób rozdzielony). W układzie złącza Josephsona z podwójną kropką kwantową, dla singletowego stanu podstawowego kropek kwantowych, obserwujemy efekt częściowej zależności prądu rozdzielonego od fazy Rashby w przypadku, gdy faza Rashby przyłożona jest symetrycznie po obu stronach kropki kwantowej.

Za pomocą odpowiedniego pola elektromagnetycznego możemy wzmacniać bądź osłabiać poszczególne składowe prądu Josephsona (pozytywna lub negatywna interferencja). Analiza zależności prądu Josephsona od strumienia pola magnetycznego, lub fazy Rashby, może być również użytecznym narzędziem do detekcji sprawności rozdzielania par Coopera w przedstawionych układach.



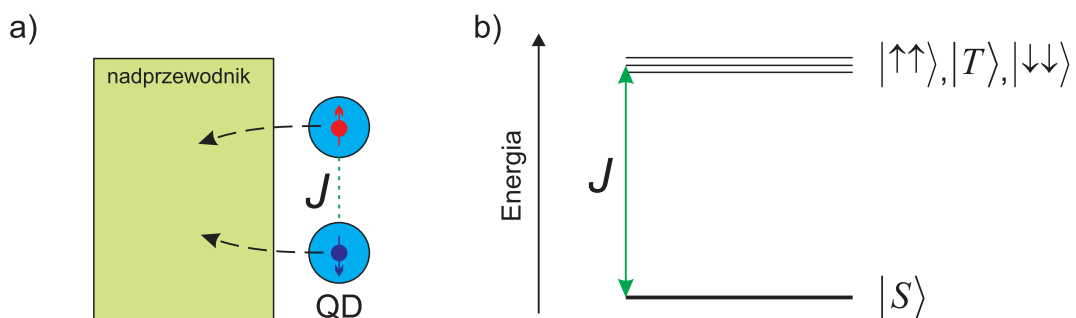


## Rozdział 5

# Nadprzewodzący efekt bliskości w kropkach kwantowych

Celem niniejszego rozdziału jest przeanalizowanie wpływu bliskości nadprzewodnika na układ podwójnej kropki kwantowej, określenie stanu podstawowego kropek kwantowych oraz zbadanie wpływu zewnętrznego pola elektrycznego na stan podstawowy układu w obecności oddziaływania spin-orbita Rashby. Ze względu na symetrię złącza Josephsona analizowany układ został ograniczony do jednej elektrody nadprzewodzącej sprzężonej z podwójną kropką kwantową. Odległość między kropkami kwantowymi jest mniejsza niż długość koherencji par Coopera (Rysunek 5.1(a)). W układzie tym zakładamy zdegenerowanie energii stanu singletowego i stanów trypletowych podwójnej kropki kwantowej, czyli  $E_{|S\rangle} = E_{|T\rangle} = E_{|\uparrow\uparrow\rangle} = E_{|\downarrow\downarrow\rangle}$ , która, jak zostanie pokazane w dalszej części rozdziału, zostaje usunięta w wyniku oddziaływań wymiany.

Różnica energii pomiędzy poziomem singletowym  $|S\rangle_{DQD}$  a poziomami trypletowymi, przedstawionymi na Rysunku 3.3, w nieobecności zewnętrznego pola elektromagnetycznego uzależniona jest od oddziaływań wymiany  $J$  (Rysunek 5.1(b)). W analizowanym



Rysunek 5.1. Schemat: a) układu podwójnej kropki sprzężonej z nadprzewodnikiem, b) poziomów energetycznych podwójnej kropki kwantowej. Odległość poziomów energetycznych trypletowych od poziomem singletowego jest równa energii wymiany  $J$ .

układzie na wartość wymiany  $J$  składa się wymiana bezpośrednio między kropkami kwantowymi  $J_{exch.}$  oraz wymiana poprzez procesy zachodzące przy udziale elektrod nadprzewo-

dzących  $J_L$ ,  $J = J_L + J_{exch.}$ . Energia wymiany między kropkami kwantowymi wynosi [85]:

$$J_{exch.} = \frac{4t_d^2}{U}, \quad (5.1)$$

gdzie  $t_d$  określa bezpośrednie sprzężenie pomiędzy kropkami kwantowymi określone w hamiltonianie (3.3), a  $U$  oznacza oddziaływania kulombowskie na pojedynczej kropce kwantowej. Ponieważ w niniejszej pracy ograniczono się do procesów dla których  $t_d \rightarrow 0$  oraz  $U \rightarrow \infty$ , człon  $J_{exch.}$  można zaniedbać, a całkowita wymiana między kropkami będzie miała miejsce poprzez procesy elektrodowe, co pozwoli na przeanalizowanie wpływu bliskości nadprzewodnika na odizolowany układ. W następnych podrozdziałach zostaną omówione procesy zachodzące w układzie, prowadzące do zniesienia degeneracji energii dwuelektronowych stanów kropek kwantowych, a także zostanie przedstawiona możliwość wytwarzania „egzotycznych” stanów (korelacji) nadprzewodzących za pomocą pola elektrycznego dzięki oddziaływaniu spin-orbita.

### 5.1. Procesy IV rzędu

Za pomocą rachunku perturbacyjnego obliczamy poprawki do energii przejść pomiędzy wszystkimi dozwolonymi stanami:

$$\begin{bmatrix} \langle S|X|S\rangle & \langle \uparrow\uparrow|X|S\rangle & \langle T|X|S\rangle & \langle \downarrow\downarrow|X|S\rangle \\ \langle S|X|\uparrow\uparrow\rangle & \langle \uparrow\uparrow|X|\uparrow\uparrow\rangle & \langle T|X|\uparrow\uparrow\rangle & \langle \downarrow\downarrow|X|\uparrow\uparrow\rangle \\ \langle S|X|T\rangle & \langle \uparrow\uparrow|X|T\rangle & \langle T|X|T\rangle & \langle \downarrow\downarrow|X|T\rangle \\ \langle S|X|\downarrow\downarrow\rangle & \langle \uparrow\uparrow|X|\downarrow\downarrow\rangle & \langle T|X|\downarrow\downarrow\rangle & \langle \downarrow\downarrow|X|\downarrow\downarrow\rangle \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

które dla procesów pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu mają postać zgodną z równaniami (3.20)-(3.22) i wynoszą odpowiednio:

$$\langle F|X|I\rangle = \langle F|V|I\rangle, \quad (5.3)$$

$$\langle F|X|I\rangle = \langle F|V \frac{1 - P_n}{E_n^{(0)} - H_0} V|I\rangle, \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \langle F|X|I\rangle &= \langle F|V \frac{1 - P_n}{E_{gs}^{(0)} - H_0} V \frac{1 - P_n}{E_{gs}^{(0)} - H_0} V|I\rangle \\ &\quad - \langle F|V|I\rangle \langle F|V \left( \frac{1 - P_n}{E_{gs}^{(0)} - H_0} \right)^2 V|I\rangle, \end{aligned} \quad (5.5)$$

gdzie  $|I\rangle$ ,  $|F\rangle$  oznaczają odpowiednio stan początkowy i końcowy, a  $V$  jest hamiltonianem zaburzającym, równym hamiltonianowi tunelowemu (3.13) ograniczonemu do jednej elektrody nadprzewodzącej (brak sumowania po  $l$ ):

$$H_T = \sum_{\alpha k \sigma} t_{Lk} \left( u_{\mathbf{k}} \gamma_{Lk\sigma}^\dagger + \sigma v_{\mathbf{k}} \gamma_{Lk\bar{\sigma}} \right) d_{\alpha\sigma} + h.c. \quad (5.6)$$

Można pokazać, że wyrazy rzędu pierwszego (5.3) i trzeciego (5.5) są równe zero, ponieważ w wyniku procesów tych rzędów układ pozostaje w stanie wzbudzonym, czyli energia układu nie zostaje zachowana. W procesach drugiego rzędu, niezerowy wkład do poprawek do energii otrzymujemy jedynie dla przejść przedstawionych na przekątnej macierzy (5.2), w których stan początkowy i końcowy są sobie równe ( $|I\rangle = |F\rangle$ ). Schemat procesu dla wszystkich stanów jest następujący:

1. Elektron z kropki kwantowej tuneluje do elektrody nadprzewodzącej, następuje wzbudzenie kwazicząstki.
2. Kolejnym krokiem jest anihilacja kwazicząstki i powrót elektronu na startową kropkę kwantową. Stan końcowy podwójnej kropki kwantowej jest równy stanowi początkowemu.

W rezultacie wkład do poprawek do energii rzędu drugiego dla wszystkich czterech rozpatrywanych poziomów jest taki sam, i będzie wynosił:

$$E^{(2)} = 2 \sum_{\mathbf{k}} t_{\mathbf{k}}^2 u_{\mathbf{k}}^2 \frac{1}{\epsilon_d - E_{\mathbf{k}}} . \quad (5.7)$$

Wynika z tego, że procesy rzędu drugiego nie będą wpływały na rozszczepienie poziomów energetycznych  $J$  i aby wyznaczyć stan podstawowy układu należy wziąć pod uwagę procesy wyższych rzędów.

Poprawki do energii czwartego rzędu mają postać zgodną z równaniem otrzymanym z rachunku perturbacyjnego IV rzędu (3.23), przy czym drugą część równania możemy pominąć ze względu na taki sam wkład dla wszystkich procesów leżących na przekątnej macierzy (5.2) oraz jego zerową wartość dla pozostałych procesów. Zatem cała różnica pomiędzy poszczególnymi przejściami zawarta jest w wyrażeniu:

$$\langle F| X |I\rangle = \langle F| V \frac{1 - P_n}{E_n^{(0)} - H_0} V \frac{1 - P_n}{E_n^{(0)} - H_0} V \frac{1 - P_n}{E_n^{(0)} - H_0} V |I\rangle . \quad (5.8)$$

Podobnie jak dla procesów rzędu drugiego, po zsumowaniu wszystkich wyrazów, niezerowy wkład do poprawek do energii uzyskujemy jedynie dla przejść przedstawionych na

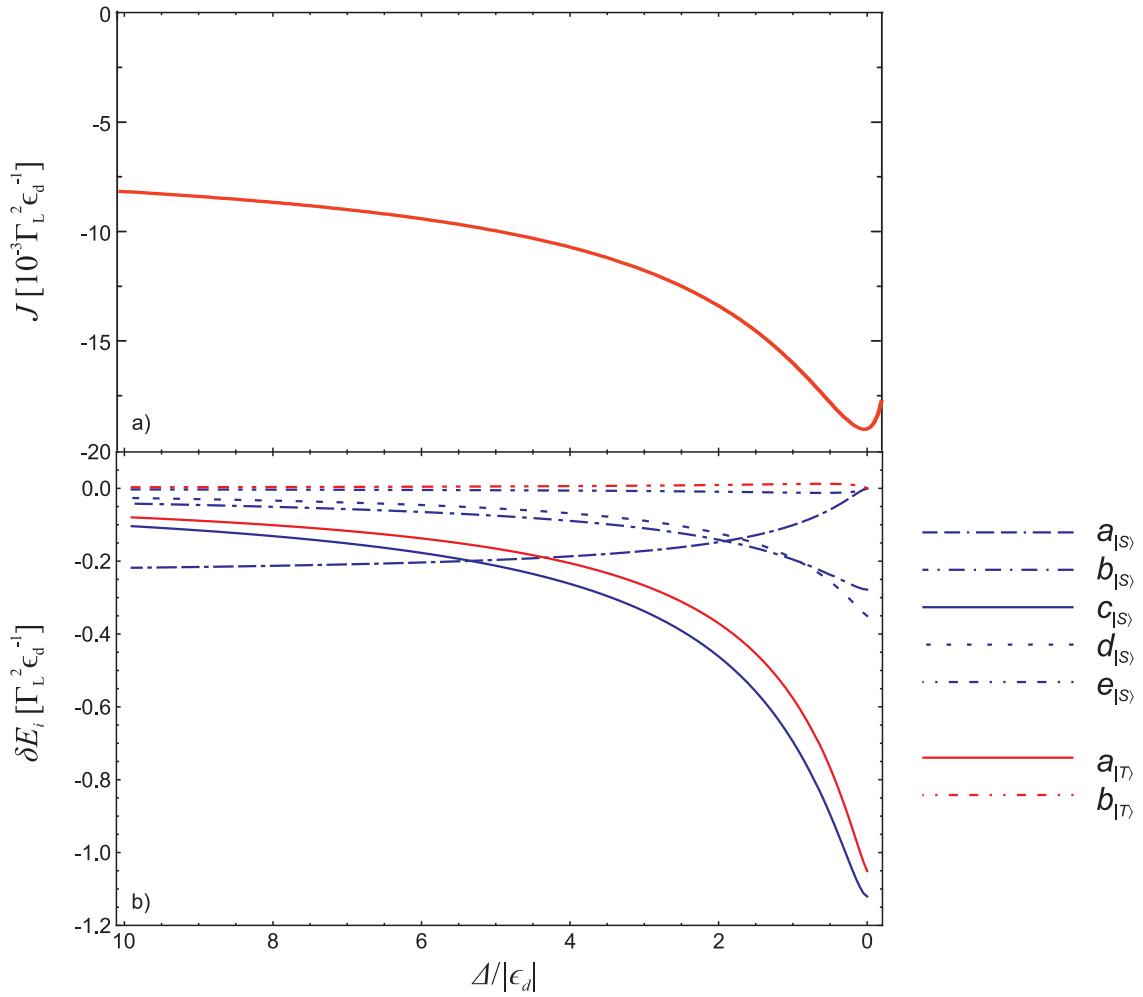
przekątnej macierzy (5.2). Mają one postać [65]:

$$E_{|S\rangle}^{(4)} = \langle S|X|S\rangle = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} 4t_{\mathbf{k}}^2 t_{\mathbf{k}'}^2 \begin{pmatrix} -u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'}v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}'}\frac{1}{\epsilon_d-E_{\mathbf{k}}}\frac{1}{\epsilon_d-E_{\mathbf{k}'}}\frac{1}{-\epsilon_d} & (a_{|S\rangle}) \\ -u_{\mathbf{k}}^2u_{\mathbf{k}'}^2\frac{1}{\epsilon_d-E_{\mathbf{k}}}\frac{1}{\epsilon_d-E_{\mathbf{k}'}}\frac{1}{-2\epsilon_d+E_{\mathbf{k}}+E_{\mathbf{k}'}} & (b_{|S\rangle}) \\ -u_{\mathbf{k}}^2u_{\mathbf{k}'}^2\left(\frac{1}{\epsilon_d-E_{\mathbf{k}}}\right)^2\frac{1}{-2\epsilon_d+E_{\mathbf{k}}+E_{\mathbf{k}'}} & (c_{|S\rangle}) \\ -u_{\mathbf{k}}^2v_{\mathbf{k}'}^2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\epsilon_d-E_{\mathbf{k}}}\right)^2\frac{1}{E_{\mathbf{k}}+E_{\mathbf{k}'}} & (d_{|S\rangle}) \\ -u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'}v_{\mathbf{k}'}\frac{1}{2}\frac{1}{\epsilon_d-E_{\mathbf{k}}}\frac{1}{\epsilon_d-E_{\mathbf{k}'}}\frac{1}{E_{\mathbf{k}}+E_{\mathbf{k}'}} & (e_{|S\rangle}) \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} E_{|T\rangle}^{(4)} = \langle \downarrow\downarrow|X|\downarrow\downarrow\rangle &= \langle T|X|T\rangle = \langle \uparrow\uparrow|X|\uparrow\uparrow\rangle = \\ &= \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} 4t_{\mathbf{k}}^2 t_{\mathbf{k}'}^2 \begin{pmatrix} -u_{\mathbf{k}}^2v_{\mathbf{k}'}^2\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\epsilon_d-E_{\mathbf{k}}}\right)^2\frac{1}{E_{\mathbf{k}'}+E_{\mathbf{k}}} & (a_{|T\rangle}) \\ +u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'}v_{\mathbf{k}'}\frac{1}{2}\frac{1}{\epsilon_d-E_{\mathbf{k}}}\frac{1}{\epsilon_d-E_{\mathbf{k}'}}\frac{1}{E_{\mathbf{k}}+E_{\mathbf{k}'}} & (b_{|T\rangle}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

gdzie poprzez  $(a_{|S\rangle})$ - $(e_{|S\rangle})$ ,  $(a_{|T\rangle})$ ,  $(b_{|T\rangle})$  oznaczono składowe poprawek do energii. Na podstawie wyrażeń (5.9) i (5.10) możemy wyznaczyć różnicę pomiędzy poprawkami czwartego rzędu, odpowiadającą wartości  $J = E_{|S\rangle}^{(4)} - E_{|T\rangle}^{(4)}$ , a następnie przeanalizować wpływ obecności nadprzewodnika na wielkość energii wymiany  $J$ . Rysunek 5.2(a) przedstawia zależność energii wymiany  $J$  w funkcji stosunku przerwy energetycznej nadprzewodnika i energii poziomu kropki kwantowej określającego odległość od położenia rezonansowego,  $\Delta/|\epsilon_d|$ , dla  $\epsilon_d = -1$  - poziom energetyczny  $\epsilon_d$  kropek kwantowych umieszczony jest w stałym położeniu poniżej sytuacji rezonansowej, odpowiadającemu obsadzeniu kropek kwantowych dwoma elektronami. Wykres ten wskazuje na niemonotoniczny charakter zależności  $J(\Delta/|\epsilon_d|)$ , który można wyjaśnić analizując poszczególne składowe wyrażeń (5.9) i (5.10), przedstawione na Rysunku 5.2(b), oraz odpowiadające im rodzaje procesów przedstawione na Rysunku 5.3.

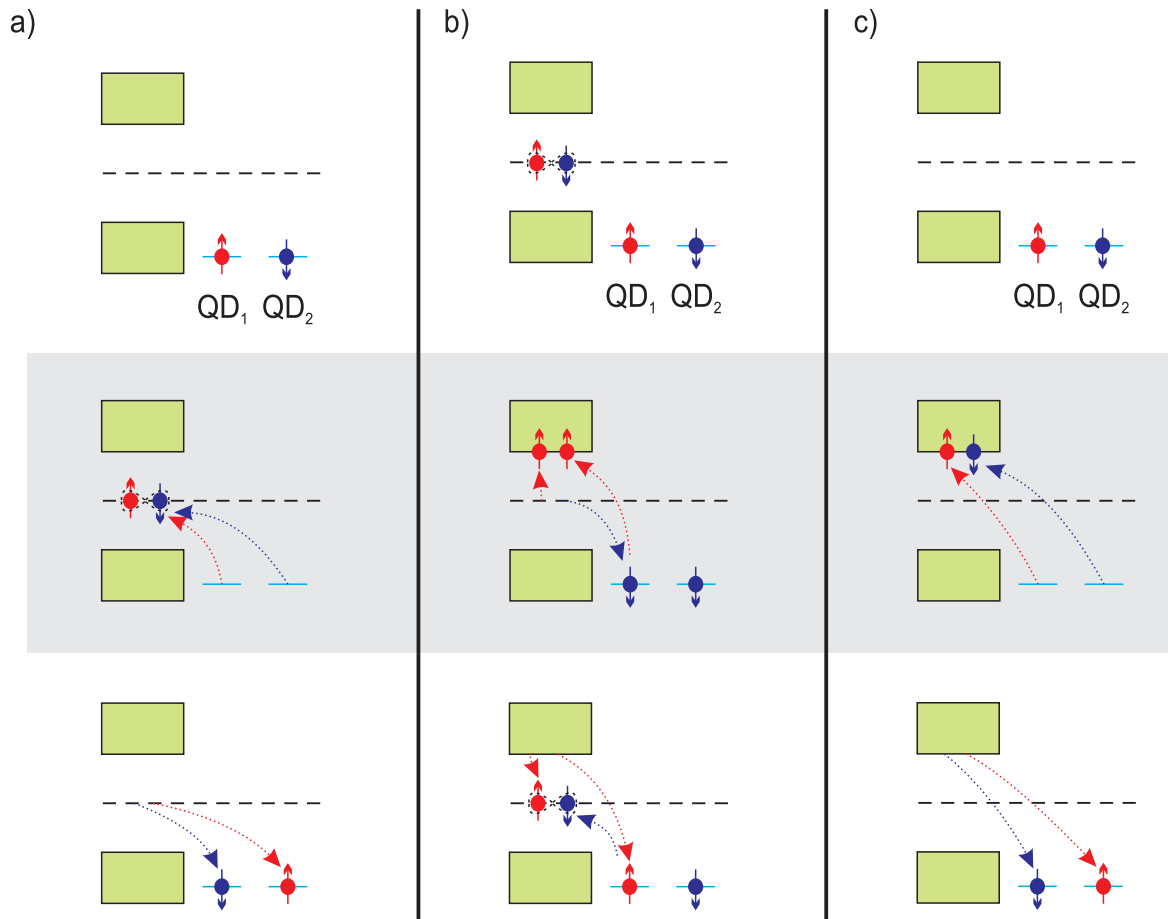
Wkład do energii wymiany  $J$  pochodzi od trzech rodzajów procesów. W pierwszym z nich (Rysunek 5.3(a)) para elektronów tuneluje z kropek kwantowych do nadprzewodnika, gdzie tworzy parę Coopera, a następnie para zostaje rozerwana i elektrony tunelują z powrotem na kropki kwantowe. Wkład od procesów tego typu odpowiada wyrażeniu  $(a_{|S\rangle})$ . W przypadku drugiego rodzaju procesów (Rysunek 5.3(b)) w stanie pośrednim mamy do czynienia z rozrywaniem pary Coopera w nadprzewodniku i wzbudzeniem dwóch kwazicząstek, odpowiada to składowym  $(d_{|S\rangle})$ ,  $(e_{|S\rangle})$ ,  $(a_{|T\rangle})$  oraz  $(b_{|T\rangle})$ . Z kolei w trzecim rodzaju procesów (Rysunek 5.3(c)) elektrony tunelujące z kropek kwantowych nie tworzą pary Coopera w nadprzewodniku, a zamiast tego następuje wzbudzenie dwóch kwaziczą-



Rysunek 5.2. Różnica energii pomiędzy poziomem singletowym a trypletowym (a) oraz zależność składowych wyrażeń dla przejść singletowych (5.9) i trypletowych (5.10) (b) w funkcji zmiany wielkości przerwy energetycznej nadprzewodnika  $\Delta/|\epsilon_d|$ , dla  $\epsilon_d = -1$ ,  $\Gamma_L = 2\pi\rho_S |t_k|^2$ . Granica całkowania  $L = 10^3 |\epsilon_d|$ .

stek, a kropki kwantowe pozostają w stanie pośrednim puste. Procesy te odpowiadają wyrażeniom  $(b_{|S\rangle})$ ,  $(c_{|S\rangle})$ .

Dla  $\Delta \rightarrow 0$  możemy mówić o przejściu elektrody nadprzewodzącej w elektrodę normalną. Wkład do energii ( $a_{|S\rangle}$ ) pochodzący od procesu przedstawionego na Rysunku 5.3(a), polegającego na utworzeniu pary Coopera, będzie zanikał dla  $\Delta \rightarrow 0$  gdyż proces tego typu nie może zajść w metalu normalnym. Z kolei procesy pokazane na Rysunku 5.3(c) (składowe  $(b_{|S\rangle})$ ,  $(c_{|S\rangle})$ ) mają swój odpowiednik dla elektrody normalnej, polegający na wzbudzeniu pary elektronów, zatem dla  $\Delta \rightarrow 0$  wkład od tych procesów będzie niezerowy. Przebieg procesów przedstawiony Rysunku 5.3(b) został pokazany w sposób uproszczony (składowe  $(d_{|S\rangle})$ ,  $(e_{|S\rangle})$ ,  $(a_{|T\rangle})$ ,  $(b_{|T\rangle})$ ). Można pokazać, że tylko procesy odpowiadające składowym  $(d_{|S\rangle})$ ,  $(a_{|T\rangle})$  mają swój odpowiednik dla elektrody normalnej, polegający na wzbudzeniu pary elektronów/dziur. Z kolei dla procesów odpowiadających składowym



Rysunek 5.3. Możliwe wirtualne stany pośrednie w procesach dających wkład do efektu bliskości. Para elektronów tuneluje z kropek kwantowych do nadprzewodnika gdzie w stanie pośrednim następuje: a) utworzenie pary Coopera (procesy  $(a_{|S})$ ), b) rozerwanie pary Coopera w nadprzewodniku ( $(d_{|S}), (e_{|S}), (a_{|T}), (b_{|T})$ ), lub c) wzbudzenie dwóch kwazicząstek (procesy  $(b_{|S}), (c_{|S})$ ). Następnie elektrony tunelują z powrotem na kropki kwantowe.

$(e_{|S}), (b_{|T})$  wymagany jest udział pary Coopera i procesy te będą zanikać dla  $\Delta \rightarrow 0$ . Dla  $\Delta/|\epsilon_d| \gg 1$  energia wymiany  $J$  dąży do stałej wartości, zależnej tylko od składowej  $(a_{|S})$ , której odpowiadający proces jest dominujący, a pozostałe procesy znoszą się wzajemnie lub dążą do zera. Zatem za obserwowany efekt bliskości nadprzewodnika w kropkach kwantowych będą odpowiadać głównie procesy dające wkład do energii typu  $(a_{|S})$ , przedstawione na Rysunku 5.3(a).

Uzyskane wyniki potwierdzają, że dla  $\epsilon_d < 0$  stanem podstawowym układu podwójnej kropki kwantowej jest stan singletowy. Umieszczając podwójną kropkę kwantową w bliskości nadprzewodnika możemy uzyskać parę elektronów w splątany stan singletowy.

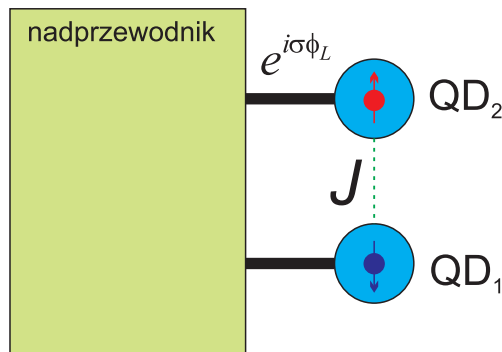
## 5.2. Wpływ oddziaływań spin-orbita Rashby na stan podstawowy układu

W poprzednim rozdziale przedstawiono wpływ oddziaływań spin-orbita Rashby na prąd płynący przez złącze Josephsona. W tej części pracy przeanalizowany zostanie wpływ tych oddziaływań na stan podstawowy układu podwójnej kropki kwantowej.

Rozpatrzmy układ składający się z dwóch kropek kwantowych połączonych z elektrodą nadprzewodzącą za pomocą drutów kwantowych w których występuje oddziaływanie spin-orbita Rashby. Transport elektronów w drucie przybliżamy poprzez hamiltonian tunelowy. Elektron tunelujący między jedną kropką kwantową a nadprzewodnikiem uzyskuje zależną od spinu fazę wynikającą z oddziaływań spin-orbita Rashby, natomiast dla uproszczenia w drugim drucie zakładamy brak oddziaływań spin-orbita (Rysunek 5.4). Tunelowanie elektronów opisujemy wówczas za pomocą hamiltonianu:

$$H_T = \sum_{\mathbf{k}\sigma} t_{Lk} \left( u_{\mathbf{k}} \gamma_{Lk\sigma}^\dagger + \sigma v_{\mathbf{k}} \gamma_{Lk\bar{\sigma}} \right) d_{1\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\sigma} e^{-i\sigma\phi_L} t_{Lk} \left( u_{\mathbf{k}} \gamma_{Lk\sigma}^\dagger + \sigma v_{\mathbf{k}} \gamma_{Lk\bar{\sigma}} \right) d_{2\sigma} + h.c. \quad (5.11)$$

Oddziaływanie spin-orbita i związana z nim precesja spinu powoduje, że możliwe są teraz przejścia odpowiadające pozadiagonalnym elementom macierzy (5.2). Po dokonaniu diagonalizacji macierzy otrzymujemy nowy stan podstawowy układu, który nie będzie już stanem singletowym, jak to miało miejsce w poprzednio przedstawionym przypadku, ale będzie superpozycją stanów singletowego i trypletowego  $|T\rangle_{DQD}$ . Ze względu na dużą złożoność otrzymanych wyników [65] szczegółowe omówienie rezultatów zostanie pominięte i przedstawiony zostanie jedynie uproszczony opis wyników.



Rysunek 5.4. Schemat układu z oddziaływaniem spin-orbita Rashby. Kropki kwantowe połączone są z nadprzewodnikiem za pomocą nanodrutów. W nanodrucie łączącym kropkę kwantową  $QD_2$  z nadprzewodnikiem istnieje oddziaływanie spin-orbita Rashby. Elektron przepływający przez ten nanodrut uzyskuje zależną od spinu fazę  $e^{i\sigma\phi_L}$ .

Elektron tunelujący między elektrodą nadprzewodzącą a drugą kropką kwantową uzyskuje zależną od spinu fazę  $\sigma\phi_L$ , wynikającą z oddziaływań spin-orbita Rashby, którą można kontrolować przez przyłożone zewnętrzne lokalne pole elektryczne [86]:

$$|\uparrow\rangle \rightarrow e^{i\phi_L} |\uparrow\rangle , \quad (5.12)$$

$$|\downarrow\rangle \rightarrow e^{-i\phi_L} |\downarrow\rangle . \quad (5.13)$$

Zatem stan singletowy  $|S\rangle_{DQD}$  przejdzie w stan:

$$|S\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{i\phi_L} |\uparrow\downarrow\rangle - e^{-i\phi_L} |\downarrow\uparrow\rangle \right) = \cos(\phi_L) |S\rangle + i \sin(\phi_L) |T\rangle , \quad (5.14)$$

Widzimy zatem, że stan singletowy przechodzi w kombinację stanu singletowego i trypletowego. Zatem wykorzystanie oddziaływań spin-orbita Rashby pozwala na sterowanie stanem pary Coopera i sztuczne wytworzenie innych „egzotycznych” stanów maksymalnie splątanych. Parowanie trypletowe elektronów zostało zaobserwowane w nadprzewodniku  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  [45]. Dzięki efektowi bliskości i oddziaływaniu spin-orbita Rashby stan ten możemy sztucznie wytwarzać w układzie dwóch kropek kwantowych.

### 5.3. Podsumowanie

W rozdziale przeanalizowano układ elektrody nadprzewodzącej sprzężonej z podwójną kropką kwantową, o zdegenerowanych energiach stanów singletowego i stanów trypletowych. Pokazano, że w wyniku procesów czwartego rzędu degeneracja energii zostaje usunięta. W wyniku nielokalnych korelacji pomiędzy kropkami kwantowymi, wynikających z bliskości nadprzewodnika, stan podstawowy kropek kwantowych jest stanem singletowym (dla  $\epsilon_d < 0$ ). Zbadano również wpływ oddziaływań spin-orbita Rashby na stan podstawowy podwójnej kropki kwantowej połączonej z nadprzewodnikiem za pomocą nanodrutów, w których poruszający się elektron uzyskuje zależną od spinu fazę. Pokazano możliwość wytwarzania trypletowego stanu splątanego dzięki wykorzystaniu oddziaływania spin-orbita Rashby.



## Rozdział 6

# Rozdzielanie par Coopera w podwójnej kropce kwantowej w zakresie współtunelowania

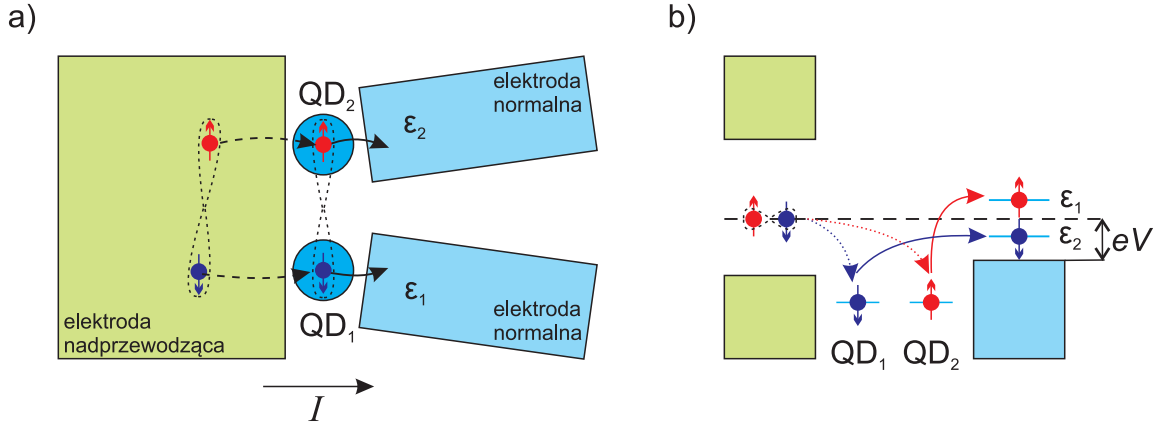
Drugim analizowanym układem jest typowy układ służący do rozdzielania par Coopera, czyli układ podwójnej kropki kwantowej sprzężonej z elektrodą nadprzewodzącą oraz dwoma elektrodami normalnymi. Układy rozdzielające pary Coopera, złożone również z kropek kwantowych sprzężonych z nadprzewodnikiem i kontaktami normalnymi są szeroko analizowane na świecie zarówno teoretycznie, jak i eksperymentalnie [8, 9, 10, 11, 56, 57, 87, 88, 89, 90]. Podobnie jak w Rozdziale 3 rozpatrujemy cztery stany podstawowe układu ( $|S\rangle_{DQD}$ ,  $|0\rangle_{DQD}$ ,  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$ ,  $|\downarrow\downarrow\rangle_{DQD}$ ) oraz transport elektronów w zakresie współtunelowania. Ponieważ eksperymentalne uzyskanie stanu podstawowego kropek kwantowych w postaci  $|T\rangle_{DQD}$  jest trudniejsze, co zostało pokazane w Rozdziale 5, szczegółowe omówienie wyników dla tego stanu podstawowego zostanie pominięte. Schemat rozpatrywanego układu przedstawiony jest na Rysunku 6.1(a).

### 6.1. Model

Rozpatrujemy układ w limicie niskiego napięcia, dzięki czemu unikamy wzbudzenia stanu podstawowego kropek kwantowych do któregoś ze stanów trypletowych ( $eV \ll J$ ). Zakładamy odległość między kropkami kwantowymi mniejszą od długości koherencji par Coopera w nadprzewodniku. Napięcie przyłożone jest w taki sposób, aby możliwy był przepływ elektronów jedynie od elektrody nadprzewodzącej w kierunku elektrod normalnych. Elektrony tunelujące przez układ muszą spełniać zasadę zachowania energii,  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$ , gdzie  $\varepsilon_{1(2)}$  oznacza energię końcową odpowiednio pierwszego i drugiego elektronu z pary, w elektrodach normalnych, co zostało schematycznie pokazane na Rysunku 6.1(b).

Hamiltonian układu składa się z czterech części [91]:

$$H = H_{\text{BCS}} + \sum_{\alpha} H_{R\alpha} + H_{\text{DQD}} + H_{\text{T}} . \quad (6.1)$$



Rysunek 6.1. Układ podwójnej kropki kwantowej sprzężonej z elektrodą nadprzewodzącą i dwoma elektrodami normalnymi. Zakładamy niskie napięcie polaryzacji ( $eV \ll J$ ), przyłożone w taki sposób, aby przepływ elektronów możliwy był od elektrody nadprzewodzącej w kierunku elektrod normalnych. a) schemat układu, b) schemat energetyczny procesu tunelowania pary Coopera. Kropki kwantowe obsadzone są parą elektronów w stanie singletowym  $|S\rangle_{DQD}$ . Para elektronów opuszcza kropki kwantowe, a na ich miejsce tuneluje para Coopera z nadprzewodnika.

Pierwszy człon opisujący elektrodę nadprzewodzącą ma postać:

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} E_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{k}\sigma}, \quad (6.2)$$

zgodną z równaniem (3.12). Drugi człon hamiltonianu opisuje elektrody normalne:

$$H_{R\alpha} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \varepsilon_{R\mathbf{k}\alpha} c_{R\mathbf{k}\sigma\alpha}^{\dagger} c_{R\mathbf{k}\sigma\alpha}. \quad (6.3)$$

Kropki kwantowe oraz oddziaływania między nimi opisuje hamiltonian:

$$H_{\text{DQD}} = \sum_{\alpha} (\varepsilon_{d\alpha} n_{\alpha} + U_{\alpha} n_{\alpha\uparrow} n_{\alpha\downarrow}) - t_d \sum_{\sigma} (d_{1\sigma}^{\dagger} d_{2\sigma} + h.c.). \quad (6.4)$$

Podobnie jak to miało miejsce dla układu z dwoma elektrodami nadprzewodzącymi, dla uproszczenia zaniedbujemy podwójne obsadzenie pojedynczej kropki kwantowej,  $U_{\alpha} \rightarrow \infty$ , oraz tunelowanie pomiędzy kropkami kwantowymi  $t_d \rightarrow 0$ . Tunelowanie elektronów par Coopera przez układ opisuje hamiltonian:

$$H_{\text{T}} = \sum_{\alpha\mathbf{k}\sigma} (t_{1\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} + \sigma v_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}\bar{\sigma}}) d_{\alpha\sigma} + h.c.) + \sum_{\alpha\mathbf{k}\sigma} (t_{2\mathbf{k}\alpha} c_{R\mathbf{k}\sigma\alpha}^{\dagger} d_{\alpha\sigma} + h.c.). \quad (6.5)$$

Pierwszy człon hamiltonianu opisuje tunelowanie elektronów z elektrody nadprzewodzącej na kropki kwantowe. Drugi człon opisuje tunelowanie elektronów z kropek kwantowych do elektrod normalnych.

Korzystając ze złotej reguły Fermiego, szybkość tunelowania elektronów z elektrody nadprzewodzącej do elektrod normalnych wyraża się wzorem [92, 91, 93]:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} |A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2 (1 - f(\varepsilon_{\mathbf{k}})) (1 - f(\varepsilon_{\mathbf{k}'})) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{k}'}), \quad (6.6)$$

gdzie:

$$A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \langle F | H_T \frac{1 - P_{gs}}{E^{(0)} - H_0} H_T \frac{1 - P_{gs}}{E^{(0)} - H_0} H_T \frac{1 - P_{gs}}{E^{(0)} - H_0} H_T | I \rangle, \quad (6.7)$$

oznacza amplitudę tunelowania elektronów, a stany  $|I\rangle$ ,  $|F\rangle$  odpowiadają stanom początkowym i końcowym,  $(1 - f(\varepsilon_{\mathbf{k}(\mathbf{k}')}))$  oznacza prawdopodobieństwo nieobsadzenia stanów o energii  $\varepsilon_{\mathbf{k}(\mathbf{k}'})$  w elektrodach normalnych,  $f(\varepsilon_{\mathbf{k}(\mathbf{k}')})$  jest funkcją Fermiego. Stanem początkowym nazywamy stan, w którym para splątanych elektronów znajduje po lewej stronie układu (w nadprzewodniku). Stan końcowy otrzymujemy po przejściu pary elektronów do elektrod normalnych. Prąd płynący w układzie uzyskujemy na podstawie wyrażenia:

$$I = e [\Gamma(V) - \Gamma(-V)]. \quad (6.8)$$

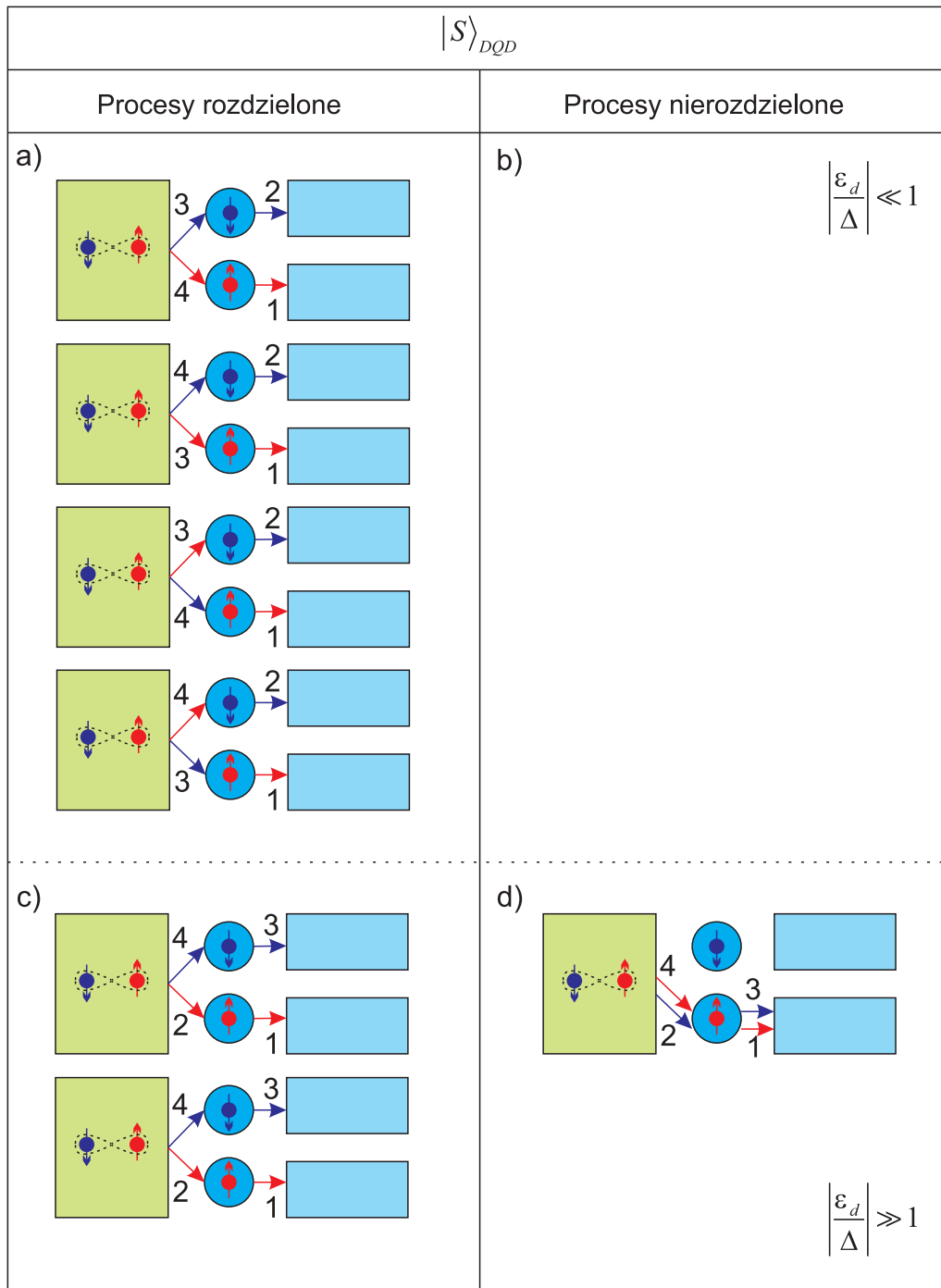
Nawiązując do sposobu przeprowadzania eksperymentów rozdzielania par Coopera, sprawność rozdzielania par zostanie określona na podstawie przewodnictwa liniowego dla  $eV \ll k_B T$ :

$$I = (G_{SPL} + G_{UNSPL}) V, \quad (6.9)$$

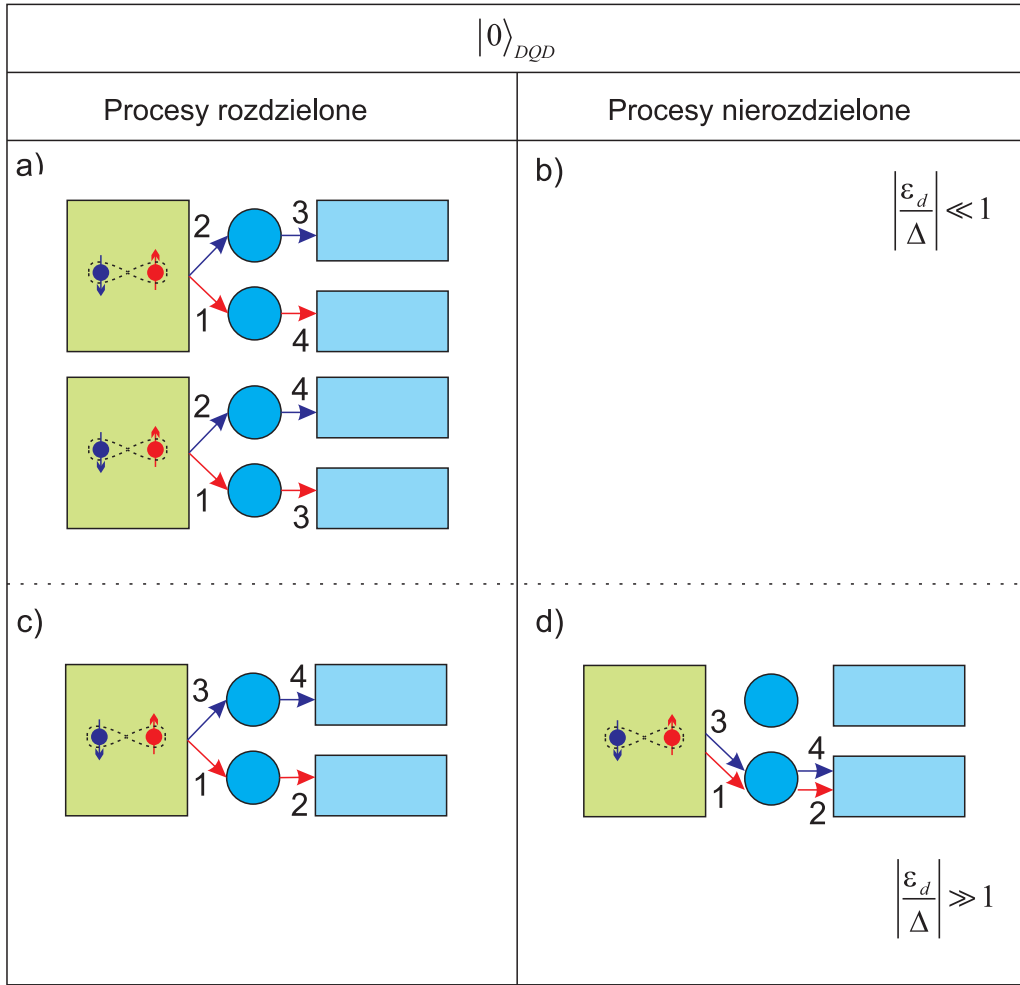
gdzie  $G_{SPL}$  i  $G_{UNSPL}$  odpowiada przewodnictwu (konduktancji) procesów, w których następuje odpowiednio rozdzielanie i nierozdzielenie pary Coopera.

## 6.2. Dozwolone procesy tunelowania

Wyrażenie (6.7) zbliżone jest do równania (3.31), odpowiadającego za dozwolone procesy tunelowania przez złącze Josephsona z podwójną kropką kwantową. W związku z podobieństwem pomiędzy analizowanymi układami, liczba dozwolonych procesów w układzie z elektrodami normalnymi nie ulegnie zmianie w porównaniu do złącza Josephsona. Schematy dozwolonych procesów dla stanów podstawowych  $|S\rangle_{DQD}$ ,  $|0\rangle_{DQD}$  i  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$  zostały przedstawione odpowiednio na Rysunkach 6.2-6.4.



Rysunek 6.2. Procesy tunelowania dla singletowego stanu podstawowego kropek kwantowych. Linia przerywana oddziela procesy, które dominują w pobliżu położenia rezonansowego ( $|\epsilon_d/\Delta| \ll 1$ ) od procesów dających największy wkład do prądu poza położeniem rezonansowym ( $|\epsilon_d/\Delta| \gg 1$ ). Strzałkami oznaczone są procesy tunelowania elektronów, których kolejność oznaczona jest liczbami 1-4. Część a) przedstawia procesy rozdzielające parę Coopera dominujące w pobliżu położenia rezonansowego poziomów energetycznych kropek kwantowych. b) W pobliżu rezonansu procesy nierozdzielające par Coopera dają niewielki wkład. Procesy c) i d) dają największy wkład poza położeniem rezonansowym.

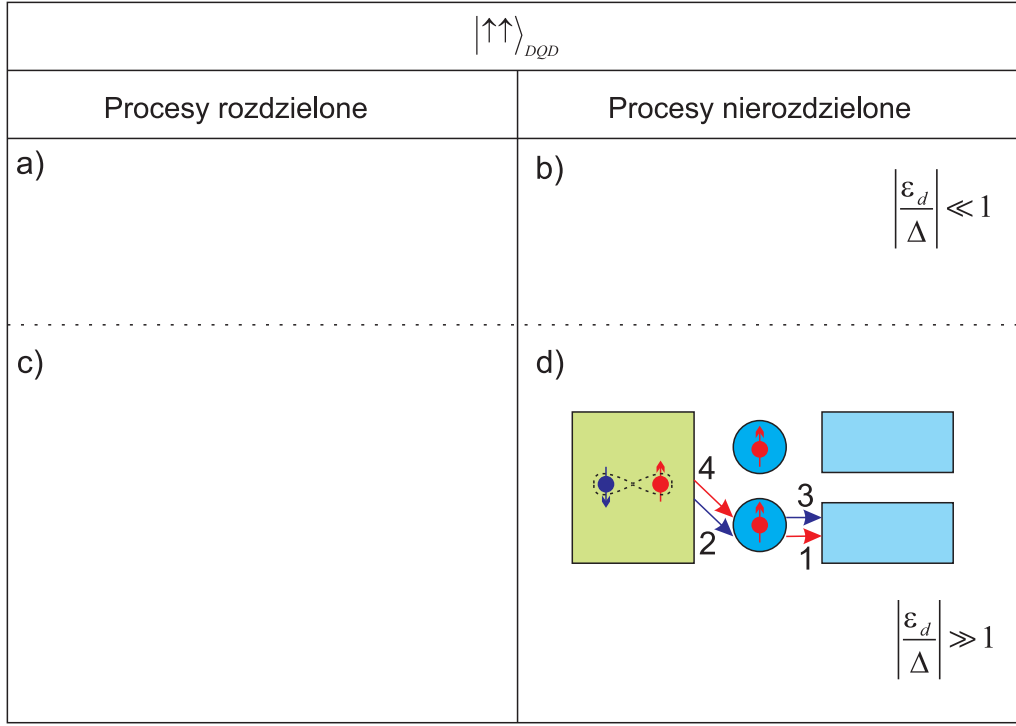


Rysunek 6.3. Procesy tunelowania dla nieobsadzonych kropek kwantowych w stanie podstawowym. Linia przerywana oddziela procesy, które dominują w pobliżu położenia rezonansowego ( $|\epsilon_d/\Delta| \ll 1$ ) od procesów dających największy wkład do prądu poza położeniem rezonansowym ( $|\epsilon_d/\Delta| \gg 1$ ). Strzałkami oznaczone są procesy tunelowania elektronów, których kolejność oznaczona jest liczbami 1-4. Część a) przedstawia procesy dominujące w pobliżu położenia rezonansowego poziomów energetycznych kropek kwantowych. b) W pobliżu rezonansu procesy nierozdzielające par Coopera dają niewielki wkład. Procesy c) i d) dają największy wkład poza położeniem rezonansowym. Liczbami 1-4, przy strzałkach, oznaczona jest kolejność procesów tunelowania elektronów.

Podobnie jak dla układu złącza Josephsona przerywana linia oddziela procesy dominujące w pobliżu i poza rezonansem, a cyfry 1-4 oznaczają kolejność tunelowania elektronów. Na podstawie dozwolonych procesów tunelowania, korzystając z równań (6.8) i (6.9) możemy wyznaczyć przewodnictwo dla poszczególnych stanów podstawowych podwójnej kropki kwantowej. Dla stanu podstawowego  $|S\rangle_{DQD}$  otrzymujemy [65]:

$$G_{SPL} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \Gamma_S^2 \Gamma_N^2 \left( \frac{1}{\epsilon_d} \right)^4, \quad (6.10)$$

$$G_{UNSP} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \Gamma_S^2 \Gamma_N^2 \left( \frac{1}{\epsilon_d} \right)^4 \left( \frac{1}{2} \right)^2 \left( a \left( \frac{\Delta}{\epsilon_d} \right) - 1 \right)^2, \quad (6.11)$$



Rysunek 6.4. Procesy tunelowania dla trypletowego stanu podstawowego podwójnej kropki kwantowej. Linia przerywana oddziela procesy, które dominują w pobliżu położenia rezonansowego ( $|\epsilon_d/\Delta| \ll 1$ ) od procesów dających największy wkład do prądu poza położeniem rezonansowym ( $|\epsilon_d/\Delta| \gg 1$ ). Strzałkami oznaczone są procesy tunelowania elektronów, których kolejność oznaczona jest liczbami 1-4. W układzie następuje blokada rozdzielania par Coopera zarówno w pobliżu rezonansu (a) jak i poza położeniem rezonansowym (c). Dozwolone są jedynie procesy, w których para Coopera tuneluje przez pojedynczą kropkę kwantową. Odpowiadają one procesom nierozdzielającym pary Coopera dla stanu singletowego. Proces ten daje największy wkład poza położeniem rezonansowym (d), a w pobliżu rezonansu wkład ten jest niewielki (b).

gdzie [91, 93]:

$$a(x) \equiv \frac{4}{\pi} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}} \arctan \sqrt{\frac{|x| - 1}{|x| + 1}}. \quad (6.12)$$

$\Gamma_S$  i  $\Gamma_N = \Gamma_{N1} = \Gamma_{N2}$  oznaczają sprzężenia odpowiednio z elektrodą nadprzewodzącą i symetrycznymi elektrodami normalnymi. Dla stanu podstawowego  $|0\rangle_{DQD}$  przewodnictwo wynosi:

$$G_{SPL} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \Gamma_S^2 \Gamma_N^2 \left( \frac{1}{\epsilon_d} \right)^4, \quad (6.13)$$

$$G_{UNSP} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \Gamma_S^2 \Gamma_N^2 \left( \frac{1}{\epsilon_d} \right)^4 \left( a \left( \frac{\Delta}{\epsilon_d} \right) - 1 \right)^2. \quad (6.14)$$

Podobnie jak to miało miejsce w złączu Josephsona z podwójną kropką kwantową dla stanu trypletowego  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$  i  $|\downarrow\downarrow\rangle_{DQD}$  występuje blokada rozdzielania par Coopera w procesach IV rzędu:

$$G_{SPL} = 0. \quad (6.15)$$

Konduktancja dla procesów nierozdzielonych jest taka sama jak dla stanu singletowego, zgodna z równaniem (6.11):

$$G_{UNSP} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \Gamma_S^2 \Gamma_N^2 \left(\frac{1}{\epsilon_d}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(a \left(\frac{\Delta}{\epsilon_d}\right) - 1\right)^2. \quad (6.16)$$

Można pokazać, że dla trypletowego stanu podstawowego  $|T\rangle_{DQD}$  wkłady do prądu pochodzące od procesów rozdzielających parę Coopera redukują się do zera i całkowita konduktancja układu związana będzie z procesami nierozdzielonymi, a otrzymany wynik będzie taki sam, jak dla stanów trypletowych  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$ ,  $|\downarrow\downarrow\rangle_{DQD}$ .

### 6.3. Sprawność rozdzielania par Coopera

Sprawność rozdzielania par Coopera definiujemy jako stosunek przewodnictwa odpowiadającego procesom, w których para Coopera ulega rozdzielaniu, do całkowitego przewodnictwa układu:

$$Eff. = \frac{G_{SPL}}{G_{SPL} + G_{UNSP}} = \frac{1}{1 + \frac{G_{UNSP}}{G_{SPL}}}. \quad (6.17)$$

Zarówno dla stanu singletowego, jak i dla stanu podstawowego z nieobsadzonymi kropkami kwantowymi  $|0\rangle_{DQD}$ , sprawność rozdzielania par Coopera w pobliżu rezonansu wynosi:

$$Eff._{|S\rangle} = Eff._{|0\rangle} = 1. \quad (6.18)$$

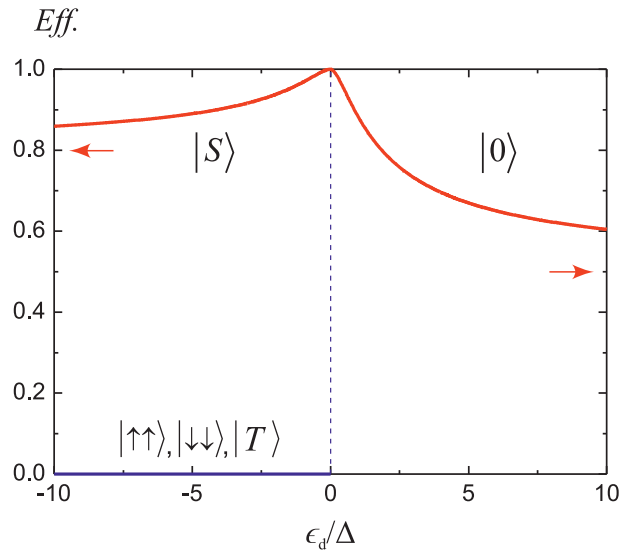
Poza rezonansem sprawność rozdzielania dla stanu  $|S\rangle_{DQD}$  dąży do wartości:

$$Eff. = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}, \quad (6.19)$$

a dla stanu  $|0\rangle_{DQD}$ :

$$Eff. = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1}\right)^2} = \frac{1}{2}. \quad (6.20)$$

Dla stanu  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$  rozdzielanie par Coopera jest niemożliwe, zatem sprawność rozdzielania wynosi 0. Zależność sprawności rozdzielania par Coopera od  $\epsilon_d/\Delta$  została przedstawiona na Rysunku 6.5.



Rysunek 6.5. Sprawność rozdzielania par Coopera w układzie podwójnej kropki kwantowej sprzężonej z elektrodą nadprzewodzącą i dwoma elektrodami normalnymi, w funkcji energii poziomów energetycznych kropek kwantowych, dla możliwych stanów  $|S\rangle_{DQD}$ ,  $|0\rangle_{DQD}$  i  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$  (lub  $|\downarrow\downarrow\rangle_{DQD}$ ,  $|T\rangle_{DQD}$ ). W pobliżu rezonansowego położenia poziomów kropek kwantowych sprawność rozdzielania par Coopera wynosi 100% dla stanów  $|S\rangle_{DQD}$  i  $|0\rangle_{DQD}$ . Poza położeniem rezonansowym sprawność rozdzielania par Coopera dąży do 80% i 50% odpowiednio dla stanu singletowego  $|S\rangle_{DQD}$  i stanu nieobsadzonych kropek kwantowych  $|0\rangle_{DQD}$ . Sprawność rozdzielania par Coopera dla stanów trypletowych  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$ ,  $|\downarrow\downarrow\rangle_{DQD}$ ,  $|T\rangle_{DQD}$  wynosi 0, w całym dozwolonym zakresie położenia poziomów energetycznych kropek kwantowych.

## 6.4. Podsumowanie

W rozdziale przeanalizowano sprawność rozdzielania par Coopera w układzie podwójnej kropki kwantowej sprzężonej z elektrodą nadprzewodzącą i dwoma elektrodami normalnymi. Sprawność rozdzielania określono na podstawie przewodnictwa układu. Prąd par Coopera płynący przez układ otrzymano na podstawie złotej reguły Fermiego.

Podobnie jak dla złącza Josephsona, odsunięcie poziomów energetycznych kropek kwantowych od położenia rezonansowego, w zakresie blokady kulombowskiej, pozwala na uzyskanie skorelowanego przepływu par splątanych elektronów przy jednoczesnym zachowaniu wysokiej sprawności rozdzielania par Coopera. W obu analizowanych układach minimalna sprawność rozdzielania par Coopera dla stanu podstawowego  $|0\rangle_{DQD}$  wynosi 50%. Dla stanu podstawowego  $|S\rangle_{DQD}$  uzyskaliśmy większą minimalną sprawność rozdzielania par Coopera w układzie z elektrodami normalnymi (80%) w porównaniu do złącza Josephsona (66,6%). Dla stanów trypletowych  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$ ,  $|\downarrow\downarrow\rangle_{DQD}$ ,  $|T\rangle_{DQD}$  niezerowy wkład do prądu otrzymujemy jedynie od procesów, w których para Coopera tuneluje w sposób nierozdzielony, zatem sprawność rozdzielania par Coopera dla tych stanów podstawowych wynosi zero. Na podstawie otrzymanych wyników możemy stwierdzić, że przejście do



---

zakresu wspóltunelowania ułatwia wyciągnięcie splątanych par elektronów z nadprzewodnika, z wysoką sprawnością rozdzielania par splątanych elektronów.



## Rozdział 7

# Detekcja stanu splątania kwantowego

Poprzednie rozdziały poświęcone były wytwarzaniu przestrzennie rozdzielonego stanu splątania kwantowego spinów elektronów za pomocą rozdzielania par Coopera. W dalszej części pracy przedstawione zostaną metody detekcji stanu splątania kwantowego oraz możliwe realizacje układów eksperymentalnych, w których można taką detekcję przeprowadzić. Zostanie przeanalizowana detekcja stanu splątania kwantowego przy użyciu detektorów ferromagnetycznych za pomocą operatora świadka splątania oraz łamania nierówności Bella. Określone zostaną wymagania jakie muszą być spełnione przez ferromagnetyczne detektory pod względem minimalnej polaryzacji spinowej.

### 7.1. Ukryte zmienne i nierówności Bella

W stanie splątania kwantowego dwóch lub więcej cząstek, w momencie dokonania pomiaru na jednej z nich, stan kwantowy pozostałych cząstek ulega natychmiastowej zmianie, niezależnie od odległości między nimi. Zgodnie z mechaniką kwantową, przed pomiarem stan kwantowy cząstki nie jest ustalony, a możemy rozpatrywać jedynie rozkłady prawdopodobieństwa. Według Einsteina, Podolsky'ego oraz Rosena [2] możliwość przewidzenia z całą pewnością wyniku pomiaru wiąże się z istnieniem jakiegoś składnika rzeczywistości (kryterium rzeczywistości). Pełna korelacja wyników pomiaru mogłaby wynikać z nieznanego kanału komunikacji między urządzeniami pomiarowymi, ale w celu wyeliminowania tego wyjaśnienia założono, że odległość między urządzeniami pomiarowymi, jest tak duża, że przesłanie informacji w czasie trwania pomiaru wymagałoby przekroczenia prędkości światła, co jest niezgodne z teorią względności Einsteina [94]. Oczekiwane jest zatem, że wynik pomiaru na jednej cząstce będzie niezależny od tego, co działo się w tym samym czasie z pozostałymi cząstkami. Jest to założenie lokalności. Teorie speł-

niające zarówno kryterium rzeczywistości, jak i założenie lokalności są nazywane teoriami realistycznymi lokalnie.

Przedstawioną właściwość splątanych cząstek można wyjaśnić za pomocą prostego modelu opartego na realizmie lokalnym. Model ten zakłada, że każda cząstka ma pewną własność lub instrukcję, która decyduje o wyniku przeprowadzanego pomiaru. Te dodatkowe atrybuty każdej cząstki nazywa się ukrytymi zmiennymi, ponieważ nie musimy ich obserwować bezpośrednio. Zgodnie z tym modelem to właśnie ukryte zmienne decydują o wyniku pomiaru. Jak zauważył Bell w 1964 roku, założenie realizmu lokalnego wymusza pewne statystyczne korelacje wyników pomiarów, które spełniają nierówności Bella [14]. Twierdzenie to wskazuje na istotną różnicę pomiędzy mechaniką kwantową a światem opisanym przez mechanikę klasyczną. Mechanika kwantowa łamie nierówności Bella, co wskazuje na jej nielokalny charakter.

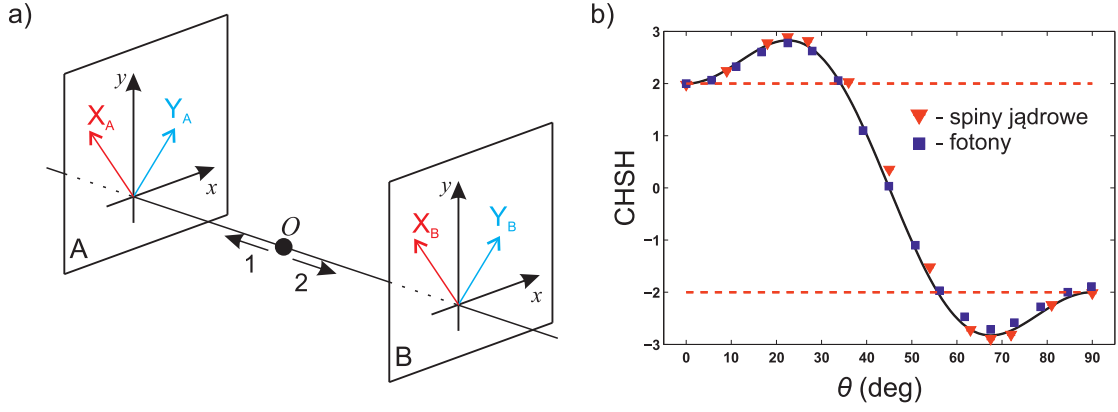
J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony i R. A. Holt opracowali wersję nierówności Bella (nierówność CHSH), którą można stosunkowo łatwo przetestować eksperymentalnie [95]. Rozpatrzmy układ, w którym dwie cząstki są wysyłane ze źródła  $O$  do dwóch urządzeń pomiarowych, oznaczonych  $A$  i  $B$  (Rysunek 7.1(a)). Każde z tych urządzeń ma dwa możliwe ustawienia pomiarowe:  $X_A$  lub  $Y_A$  oraz  $X_B$  lub  $Y_B$ . W wyniku pomiaru cząstki na urządzeniu otrzymujemy jeden z dwóch wyników, równy  $\pm 1$ . Nierówność Bella (CHSH), spełniona dla układów klasycznych (układów z ukrytymi parametrami), ma postać:

$$|\langle X_A X_B \rangle + \langle Y_A X_B \rangle - \langle X_A Y_B \rangle + \langle Y_A Y_B \rangle| \leq 2. \quad (7.1)$$

Dla układów kwantowych, gdy cząstki wysyłane ze źródła są w stanie splątania kwantowego, jest możliwe złamanie nierówności Bella (7.1). Wówczas:

$$|\langle X_A X_B \rangle + \langle Y_A X_B \rangle - \langle X_A Y_B \rangle + \langle Y_A Y_B \rangle| > 2, \quad (7.2)$$

i w skrajnym przypadku korelator wynosi  $2\sqrt{2} \approx 2.83$ . Wynika z tego, że mechanika kwantowa jest sprzeczna z założeniem realizmu lokalnego, czyli ma charakter nielokalny. Rysunek 7.1(b) przedstawia wyniki pomiarów nierówności CHSH dla dwóch eksperymentów. W pierwszym z nich dokonywano pomiaru polaryzacji splątanych fotonów [96]. W drugim eksperymencie nierówność CHSH testowana była dla splątanych spinów jąder atomowych w komputerze kwantowym NMR [97]. Kąt  $\theta$  oznacza kąt pomiędzy ustawieniami polaryzatorów lub kierunków pomiaru spinów ( $\theta = \angle X_A X_B = \angle X_B Y_A = \angle Y_A Y_B$ ). Otrzymane



Rysunek 7.1. Pomiaru nierówności CHSH. a) Schemat układu pomiarowego. Źródło  $O$  emituje parę splątanych cząstek (np. fotony), do dwóch stanowisk pomiarowych A i B, gdzie dokonuje się pomiaru wielkości splątanej (np. polaryzacji). Układy pomiarowe A i B mają możliwość dokonywania pomiarów w dwóch niezależnych od siebie ustawieniach X i Y. b) Wyniki eksperymentalne uzyskane dla fotonów o splątanych polaryzacjach [96] i splątanych spinów jąder atomowych [97].

Kąt  $\theta$  oznacza kąt pomiędzy ustawieniami polaryzatorów lub kierunków pomiaru spinów.

w eksperymentach wyniki przedstawione na Rysunku 7.1(b) pokazują łamanie nierówności CHSH dla odpowiednich ustawień analizatorów w obu eksperymentach. Potwierdza to sprzeczność charakteru stanu splątanych cząstek z założeniem realizmu lokalnego.

## 7.2. Kryterium separowalności i świadek splątania

Do opisu układu kwantowego oprócz operatorów i wektorów stanu w przestrzeni Hilberta można zastosować operator gęstości  $\rho$ . W przypadku stanu czystego opisywanego przez wektor  $|\psi\rangle$  operator gęstości ma postać:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| . \quad (7.3)$$

Dla stanu mieszanego opisanego za pomocą ortogonalnych wektorów  $|\psi_i\rangle$  operator gęstości może być zdefiniowany następująco:

$$\rho = \sum_i w_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| , \quad (7.4)$$

gdzie  $w_i$  oznacza prawdopodobieństwo znalezienia poszczególnego składnika ( $0 \leq w_i < 1$ ,  $\sum_i w_i = 1$ ).

Stan kwantowy dwóch podukładów opisywany za pomocą operatora gęstości  $\rho_{AB}$  jest splątany, jeżeli nie jest separowalny, tzn. nie można go zapisać w postaci iloczynu tenso-

rowego stanów w dowolnej bazie (1.4):

$$\rho_{AB}^{sep} = \sum_i q_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|_A \otimes |\phi_i\rangle \langle \phi_i|_B , \quad (7.5)$$

gdzie  $q_i \geq 0$  oraz  $\sum_i q_i = 1$ ,  $|\psi\rangle$  i  $|\phi\rangle$  oznaczają wektory stanów w odpowiadających im podukładach  $A$  i  $B$ . Jednym z kryteriów dających warunek konieczny, aby stan układu był separowalny jest kryterium Peresa-Horodeckiego [98, 99]. Według tego kryterium stan  $\rho_{AB}$  jest separowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne częściowej transpozycji  $\rho_{AB}^{T_B}$  zastosowanej do podukładu  $B$  są nieujemne. Częściowa transpozycja zdefiniowana jest następująco:

$$\begin{aligned} \rho_{AB}^{T_B} &= \left( \sum_{ijkl} c_{ijkl} |i\rangle \langle j|_A \otimes |k\rangle \langle l|_B \right)^{T_B} := \sum_{ijkl} c_{ijkl} |i\rangle \langle j|_A \otimes |l\rangle \langle k|_B \\ &\equiv \sum_{ijkl} c_{ijlk} |i\rangle \langle j|_A \otimes |k\rangle \langle l|_B . \end{aligned} \quad (7.6)$$

Bazując na przedstawionym kryterium separowalności zaproponowano nową metodę detekcji stanu splątania kwantowego zwaną świadkiem splątania [99, 100]. Obserwabłą  $\mathcal{W}$  nazywamy świadkiem splątania jeżeli dla wszystkich stanów separowalnych:

$$\text{Tr}(\mathcal{W}\rho_{sep}) \geq 0 , \quad (7.7)$$

a dla przynajmniej jednego stanu splątanego:

$$\text{Tr}(\mathcal{W}\rho_{ent}) < 0 . \quad (7.8)$$

Można pokazać, że dla każdego stanu splątanego  $\rho_{ent}$  istnieje świadek splątania. Operator świadka splątania może być zdefiniowany jako częściowa transpozycja operatora rzutowania na wektor własny odpowiadający ujemnej wartości własnej  $\rho_{AB}^{T_B}$  [101]:

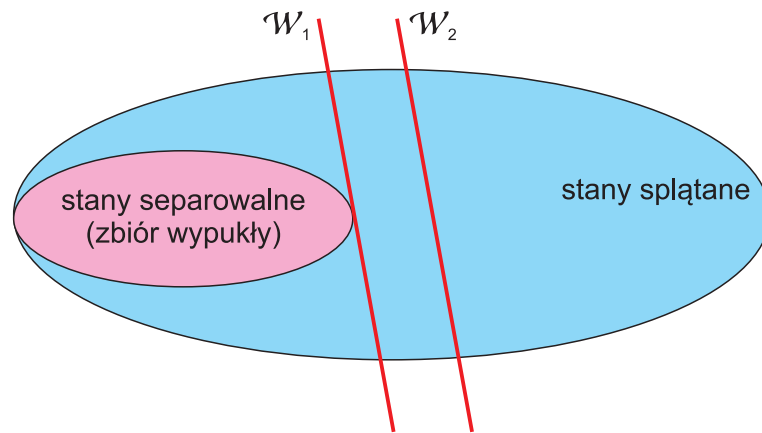
$$\mathcal{W}|\varphi\rangle = \varsigma' |\varphi\rangle , \quad (7.9)$$

$$\varsigma' < 0 , \quad (7.10)$$

$$\mathcal{W} = |\varphi\rangle \langle \varphi|_{AB}^{T_B} . \quad (7.11)$$

Zgodnie z definicją, każdy świadek splątania może wykrywać tylko część stanów splątanych. Czyli czasami możliwe jest istnienie świadka splątania, który jest precyzyjniej-

szy niż obecnie używany, gdyż jest w stanie wykryć więcej stanów splątanych. Rysunek 7.2 przedstawia zbiór wszystkich możliwych stanów, w którym możemy wyodrębnić zbiór stanów separowalnych, który, jak można pokazać, jest zbiorem wypukłym. Działanie świadka splątania możemy zobrazować poprzez linię ciągłą oznaczającą hiperpłaszczyznę, gdzie  $\text{Tr}(\mathcal{W}_i\rho) = 0$ . Za pomocą świadka splątania możemy wykryć te stany, dla których  $\text{Tr}(\mathcal{W}_i\rho) < 0$ , czyli na rysunku znajdują się po prawej stronie linii. Dla optymalnego świadka splątania hiperpłaszczyzna powinna być styczna do zbioru stanów separowalnych, czyli musi istnieć stan separowalny  $\rho_{sep}$  dla którego  $\text{Tr}(\mathcal{W}\rho_{sep}) = 0$ . W przedstawionym przykładzie świadek  $\mathcal{W}_1$  jest bardziej precyzyjny niż  $\mathcal{W}_2$ , gdyż wykrywa większą liczbę stanów splątanych.



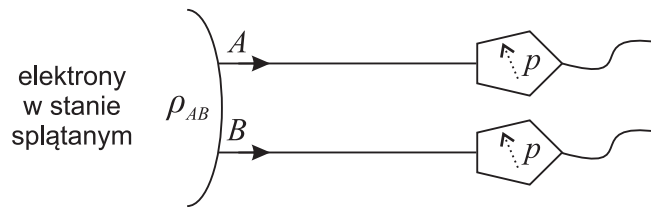
Rysunek 7.2. Zbiory stanów splątanych i wyodrębniony w nim zbiór stanów separowalnych. Linie ciągłe oznaczają hiperpłaszczyzny, gdzie dla świadków splątania  $\text{Tr}(\mathcal{W}_i\rho) = 0$ . Dla optymalnego świadka splątania hiperpłaszczyzna powinna być styczna do zbioru stanów separowalnych. Świadek  $\mathcal{W}_1$  jest bardziej precyzyjny niż  $\mathcal{W}_2$ , gdyż wykrywa większą liczbę stanów splątanych.

### 7.3. Detekcja splątania kwantowego za pomocą nieidealnych detektorów ferromagnetycznych

Prąd elektryczny jest strumieniem elektronów charakteryzujących się ładunkiem elementarnym i spinem. Typowymi materiałami wykorzystywanymi w układach elektronicznych są półprzewodniki, a ponieważ materiały te są niemagnetyczne, spin elektronu nie odgrywa istotnej roli w przepływie prądu elektrycznego. W tych układach wkład do prądu elektrycznego pochodzący od elektronów o przeciwnych spinach jest taki sam i są one nierozróżnialne. Spin elektronu zaczyna odgrywać istotną rolę w przypadku, gdy do budowy układów elektronicznych zastosujemy materiały ferromagnetyczne, czyli materiały o bardzo silnych własnościach magnetycznych. W takich układach będzie istniał pewien

wyróżniony kierunek wynikający z kierunku magnetyzacji, co prowadzi do spinowej polaryzacji elektronów, czyli spin elektronu zwrócony będzie przeciwnie lub zgodnie do kierunku magnetyzacji. Większość procesów rozpraszania elektronów, odpowiadających za powstanie oporu elektrycznego, nie zmienia ich spinu, co skutkuje podziałem kanału transportu elektronów na dwa kanały spinowe, dla elektronów o spinie zgodnym i przeciwnym do kierunku magnetyzacji. Dwukanałowy model transportu elektronowego w metalach magnetycznych został zaproponowany w 1964 roku przez Motta [102]. W materiałach ferromagnetycznych gęstości stanów elektronowych na poziomie Fermiego dla obu kierunków spinu są różne, co prowadzi do asymetrii własności transportowych w obu kanałach spinowych. Prawdopodobieństwo rozpraszania elektronów w jednym kanale spinowym jest większe niż prawdopodobieństwo rozpraszania elektronów o spinie przeciwnym. Wynika to z różnicy liczby dostępnych stanów, do których elektron może zostać rozproszony, co jest podstawą zjawiska gigantycznego magnetooporu GMR. W przypadku dużej asymetrii gęstości stanów na poziomie Fermiego możliwe jest uzyskanie prądu elektrycznego składającego się z elektronów o spinie w jednym kierunku. Zastosowanie ferromagnetycznych detektorów pozwala na zamianę informacji o spinie elektronu na sygnał ładunkowy, możliwy do eksperymentalnego zarejestrowania.

Analizowany układ składa się ze źródła splątanych elektronów połączonego z dwoma kanałami przewodzenia (elektronów)  $A$  i  $B$ , w których znajdują się detektory ferromagnetyczne. Schemat układu przedstawiony jest na Rysunku 7.3.



Rysunek 7.3. Schemat układu do detekcji stanu splątania kwantowego. Źródło wysyła parę elektronów w stanie opisanym operatorem gęstości  $\rho_{AB}$ . Rozdzielona para elektronów za pomocą dwóch kanałów transportowych A i B jest przesyłana do detektorów ferromagnetycznych charakteryzujących się polaryzacją spinową  $p$

Zakładamy, że źródło emituje pary elektronów w stanie singletowym:

$$|\Psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B), \quad (7.12)$$

które przesyłane są w sposób rozdzielony do detektorów za pomocą odpowiednio elektron pierwszy kanałem transportowym A i elektron drugi kanałem transportowym B.



W rzeczywistym eksperymencie, wytwarzany przez źródło stan kwantowy ulega wpływowi zewnętrznych źródeł szumu i dekoherencji (omówionych w dalszej części pracy). W rezultacie stan splątany (7.12) przechodzi w stan mieszany. Postać nowego stanu zależy od sposobu oddziaływania z otoczeniem. Najczęściej modelowany jest on za pomocą stanu Wernera [103], czyli połączenia stanu maksymalnie splątanego oraz szumu białego:

$$\rho_{AB}^W(\lambda) = \lambda |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|_{AB} + (1-\lambda) \frac{I}{4}, \quad (7.13)$$

gdzie  $0 \leq \lambda \leq 1$  jest parametrem widzialności, a  $I$  oznacza operator jednostkowy (identyczności), za pomocą którego modelowany jest szum biały. Pokazano, że stan Wernera jest stanem splątany dla  $\lambda > 1/3$  [104].

### 7.3.1. Polaryzacja spinowa i pomiar spinu elektronu

W materiałach ferromagnetycznych gęstości stanów elektronów na poziomie Fermiego są różne dla różnych spinów,  $N_\uparrow(E_F) \neq N_\downarrow(E_F)$ . Parametrem charakteryzującym układy ferromagnetyczne jest polaryzacja spinowa, zdefiniowana jako:

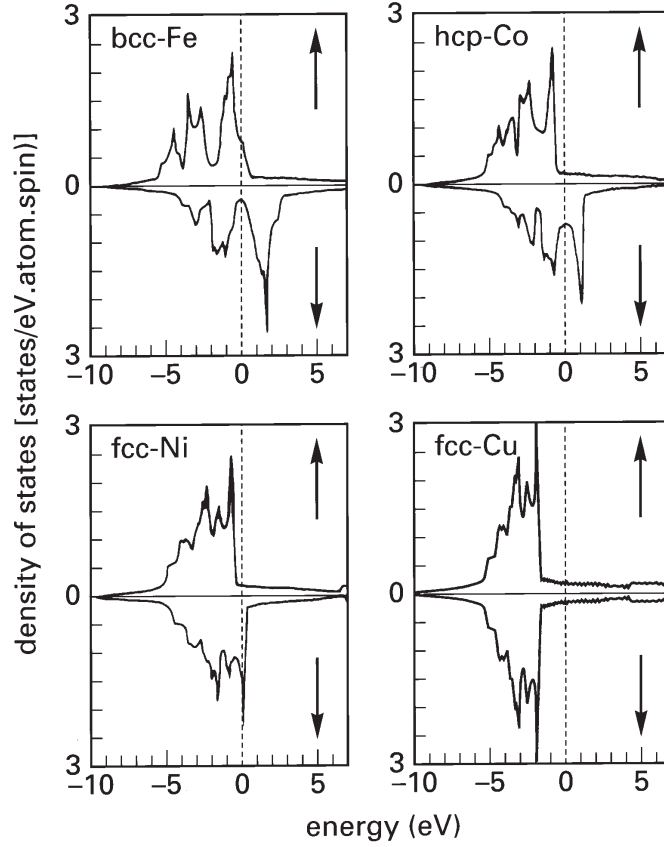
$$p = \frac{N_\uparrow(E_F) - N_\downarrow(E_F)}{N_\uparrow(E_F) + N_\downarrow(E_F)}, \quad (7.14)$$

gdzie  $N_\uparrow(E_F)$  i  $N_\downarrow(E_F)$  oznaczają gęstości stanów dla spinów w górę i w dół (większościowe i mniejszościowe nośniki ładunku elektrycznego). Idealny detektor ferromagnetyczny charakteryzowałby się polaryzacją spinową  $p = 1$ . W typowych materiałach ferromagnetycznych (np. Ni, Co, Fe) polaryzacja spinowa jest mniejsza od 1, co oznacza  $N_\sigma(E_F), N_{\bar{\sigma}}(E_F) > 0$ . Rysunek 7.4 przedstawia spinowo zależne gęstości stanów dla metali ferromagnetycznych Fe, Co, Ni oraz dla diamagnetycznej Cu [105]. Naszym celem jest określenie wymagań (minimalna polaryzacja spinowa), jakie muszą spełniać detektory ferromagnetyczne, aby wykryć stan splątania kwantowego.

Za pomocą detektorów ferromagnetycznych chcemy zmierzyć rzut stanu spinowego na  $|\uparrow\rangle_{\vec{n}}$  oraz  $|\downarrow\rangle_{\vec{n}}$ , określone przez kierunek magnetyzacji detektorów  $\vec{n}$ . Dla idealnych detektorów dokonujemy pomiaru von Neumanna opisanego za pomocą operatorów rzutowania:

$$P_\uparrow = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_{\vec{n}}, \quad (7.15)$$

$$P_\downarrow = |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_{\vec{n}}. \quad (7.16)$$



Rysunek 7.4. Gęstości stanów Fe, Co, Ni, Cu otrzymane za pomocą samozgodnych obliczeń struktury pasm [105].

Prawdopodobieństwo otrzymania wyniku  $i \in \{\uparrow, \downarrow\}_{\vec{n}}$  podczas pomiaru stanu jednego spinu  $\rho$  dane jest przez:

$$\eta_i = \text{Tr}(P_i \rho) . \quad (7.17)$$

W przypadku nieidealnych detektorów ferromagnetycznych, gdzie na poziomie Fermiego gęstości stanów obu spinów są większe od zera, istnieje niezerowe prawdopodobieństwo dokonania błędnego pomiaru, np. stan  $|\uparrow\rangle_{\vec{n}}$  może zostać zmierzony jako  $|\downarrow\rangle_{\vec{n}}$ . Pomiar przy użyciu nieidealnych detektorów opisuje się za pomocą operatorów miary dodatniej POVM (positive-operator valued measure) [13, 106]. POVM definiuje się jako zbiór operatorów  $M_i$  spełniających warunki:

$$M_i = M_i^\dagger , \quad (7.18)$$

$$\sum_i M_i = I . \quad (7.19)$$

Dla analizowanego pomiaru operatory  $M_i$  można przedstawić w następujący sposób:

$$M_\uparrow = \Gamma_+ |\uparrow\rangle \langle \uparrow|_{\vec{n}} + \Gamma_- |\downarrow\rangle \langle \downarrow|_{\vec{n}} , \quad (7.20)$$

$$M_{\downarrow} = \Gamma_+ |\downarrow\rangle \langle \downarrow|_{\vec{n}} + \Gamma_- |\uparrow\rangle \langle \uparrow|_{\vec{n}}, \quad (7.21)$$

gdzie  $\Gamma_+ + \Gamma_- = 1$ . Można powiązać  $\Gamma_+$  i  $\Gamma_-$  z zależną od spinu gęstością stanów  $N_{\sigma}$  detektorów ferromagnetycznych, poprzez:

$$\Gamma_+ = \frac{N_{\uparrow}}{N_{\uparrow} + N_{\downarrow}}, \quad (7.22)$$

$$\Gamma_- = \frac{N_{\downarrow}}{N_{\uparrow} + N_{\downarrow}}, \quad (7.23)$$

lub za pomocą polaryzacji spinowej:

$$\Gamma_{\pm} = \frac{1 \pm p}{2}. \quad (7.24)$$

Wówczas równania (7.20) i (7.21) możemy zapisać w postaci:

$$M_{\uparrow} = \frac{1}{2} (1 + p) |\uparrow\rangle \langle \uparrow|_{\vec{n}} + \frac{1}{2} (1 - p) |\downarrow\rangle \langle \downarrow|_{\vec{n}}, \quad (7.25)$$

$$M_{\downarrow} = \frac{1}{2} (1 + p) |\downarrow\rangle \langle \downarrow|_{\vec{n}} + \frac{1}{2} (1 - p) |\uparrow\rangle \langle \uparrow|_{\vec{n}}, \quad (7.26)$$

gdzie polaryzacja  $p \in [0, 1]$  jest również miarą sprawności detektorów ferromagnetycznych. Stan spinu jest wykrywany z prawdopodobieństwem:

$$\tilde{\eta}_i = \text{Tr}(M_i \rho). \quad (7.27)$$

Dla  $p = 1$ , czyli dla polaryzacji idealnych detektorów, równania (7.25) i (7.26) przechodzą odpowiednio w równania (7.15) i (7.16).

Pomiar spinu elektronu wzdłuż kierunku  $\vec{n}$ , za pomocą idealnych detektorów ( $p = 1$ ), można zapisać jako wartość oczekiwaną operatora:

$$\hat{\sigma}_{\vec{n}} = P_{\uparrow} - P_{\downarrow}, \quad (7.28)$$

gdzie  $\hat{\sigma}_{\vec{n}} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ , a  $\vec{\sigma}$  jest wektorem zawierającym macierze Pauliego. Pomiar za pomocą nieidealnych detektorów ( $p < 1$ ) jest równoważny pomiarowi obserwabli  $\hat{\sigma}_{\vec{n}}^{(p)}$ :

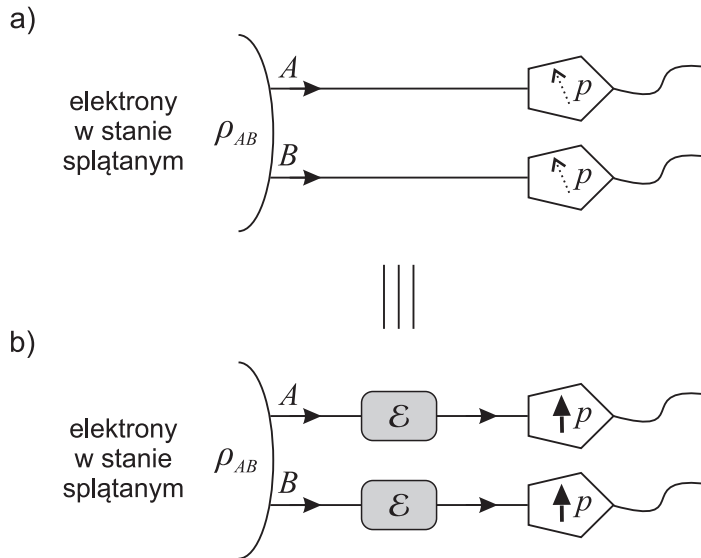
$$\hat{\sigma}_{\vec{n}}^{(p)} = M_{\uparrow} - M_{\downarrow}. \quad (7.29)$$

Z równań (7.25) i (7.26) wynika związek  $\hat{\sigma}_{\vec{n}}^{(p)} = p \hat{\sigma}_{\vec{n}}$ , który podkreśla rolę polaryzacji

spinowej jako miary sprawności procesu detekcji, gdyż dla  $p = 1$  dokonujemy dokładnego pomiaru, dla  $p = 0$  nie możemy zmierzyć spinu elektronu, a dla  $0 < p < 1$  informacja o spinie jest częściowa.

### 7.3.2. Równoważność nieidealnego pomiaru i kanału depolaryzacyjnego

Do tej pory zdefiniowaliśmy stan wejściowy spinu  $\rho$  oraz pomiar spinu dla nieidealnych detektorów. W tej części pracy wykażemy, że użycie tego rodzaju nieidealnego pomiaru jest równoważne pewnemu operatorowi depolaryzującemu  $\mathcal{E}(\rho)$  działającemu na stan  $\rho$  w kanałach transportowych i pomiarowi przy użyciu idealnych detektorów ferromagnetycznych ( $p = 1$ ). Schematycznie zostało to pokazane na Rysunku 7.5.



Rysunek 7.5. Schemat układu do detekcji stanu splątania kwantowego z a) nieidealnymi detektorami ferromagnetycznymi ( $p < 1$ ), b) równoważny układ z kanałem depolaryzacyjnym i idealnymi detektorami ferromagnetycznymi ( $p = 1$ ). Źródło splątanych elektronów połączone jest z idealnymi detektorami ferromagnetycznymi za pomocą kanałów transportowych, w których możliwa jest depolaryzacja.

Kanał depolaryzujący definiujemy w następujący sposób [13]:

$$\mathcal{E}(\rho) = p\rho + \frac{1}{2}(1-p)I. \quad (7.30)$$

Chcemy pokazać, że dla dowolnej obserwabli  $\mathcal{O}$  spełnione jest wyrażenie:

$$\text{Tr}[\mathcal{O}\mathcal{E}(\rho)] = \text{Tr}[\mathcal{E}(\mathcal{O})\rho]. \quad (7.31)$$

Aby dowieść powyższej równości dokonujemy przekształcenia (7.30) podstawiając  $p' = \frac{1+3p}{4}$  oraz wstawiając macierze Pauliego  $\hat{\sigma}_i$ :

$$\mathcal{E}(\rho) = p'\rho + \frac{1-p'}{3}(\hat{\sigma}_x\rho\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y\rho\hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_z\rho\hat{\sigma}_z) . \quad (7.32)$$

Przekształcając ślad  $\text{Tr}[\mathcal{O}\mathcal{E}(\rho)]$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\mathcal{O}\mathcal{E}(\rho)] &= \text{Tr}\left[\mathcal{O}p'\rho + \frac{1-p'}{3}(\mathcal{O}\hat{\sigma}_x\rho\hat{\sigma}_x + \mathcal{O}\hat{\sigma}_y\rho\hat{\sigma}_y + \mathcal{O}\hat{\sigma}_z\rho\hat{\sigma}_z)\right] \\ &= \text{Tr}\left[p'\mathcal{O}\rho + \frac{1-p'}{3}(\hat{\sigma}_x\mathcal{O}\hat{\sigma}_x\rho + \hat{\sigma}_y\mathcal{O}\hat{\sigma}_y\rho + \hat{\sigma}_z\mathcal{O}\hat{\sigma}_z\rho)\right] \\ &= \text{Tr}[\mathcal{E}(\mathcal{O})\rho] , \end{aligned} \quad (7.33)$$

gdzie skorzystaliśmy z liniowości śladu macierzy oraz niezmienniczości względem cyklicznych permutacji wewnętrznych macierzy. Można zaobserwować, że:

$$\mathcal{E}(P_i) = M_i , \quad (7.34)$$

co w połączeniu z równaniem (7.31), pokazuje na równoważność nieidealnych detektorów i mechanizmu depolaryzującego z równania (7.30) z idealnymi detektorami:

$$\text{Tr}(M_i\rho) = \text{Tr}[P_i\mathcal{E}(\rho)] . \quad (7.35)$$

Przedstawiona w niniejszym podrozdziale równoważność detekcji za pomocą nieidealnych detektorów i kanału depolaryzującego pozwala na ułatwienie obliczeń przedstawionych w dalszej części pracy.

### 7.3.3. Świadek splątania

Zakładamy, że naszym celem jest detekcja maksymalnie splątanego, spinowego stanu singletowego opisanego przez macierz gęstości w bazie kanonicznej:

$$\rho_{AB} = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (7.36)$$

Korzystając z definicji (7.6) dokonujemy częściowej transpozycji macierzy gęstości stanu singletowego:

$$\rho_{AB}^{T_B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.37)$$

Wartości własne otrzymanej macierzy wynoszą  $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ , a wektor własny  $|\varphi\rangle$  odpowiadający ujemnej wartości własnej  $(-\frac{1}{2})$  ma postać:

$$|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.38)$$

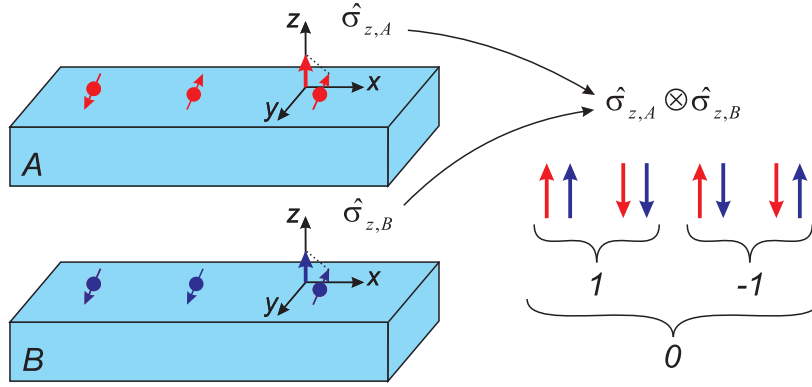
Operator świadka splątania otrzymujemy korzystając z definicji (7.11):

$$\mathcal{W} = |\varphi\rangle \langle \varphi|_{AB}^{T_B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{T_B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.39)$$

Uzyskany świadek splątania może zostać przedstawiony za pomocą macierzy jednostkowej oraz iloczynów tensorowych wszystkich trzech macierzy Pauliego, jako korelatorów spinowych [99, 101]:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} (I + \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z). \quad (7.40)$$

Pomiar za pomocą korelatorów spinowych polega na pomiarze rzutu spinów elektronów w obu kanałach transportowych na wybrane kierunki i analizie korelacji między uzyskanymi wynikami. Jeżeli dla danego zestawu par elektronów każdy pomiar spinów, wzdłuż jednego kierunku, wykaże uporządkowanie równoległe, to korelator spinowy  $\hat{\sigma}_{iA} \otimes \hat{\sigma}_{iB}$  będzie wynosił 1, a dla konfiguracji antyrównoległej  $-1$ . Jeżeli obie możliwe konfiguracje będą występowały z jednakowym prawdopodobieństwem, to wartość korelatora spinowego wynosić będzie 0. Pomiar za pomocą korelatorów spinowych został przedstawiony schematycznie na Rysunku 7.6.



Rysunek 7.6. Dokonujemy pomiaru spinu wzdłuż wybranego kierunku (np.  $z$ )  $\hat{\sigma}_{z,A/B}$  spinów pary elektronów w obu kanałach transportowych A i B. Jeżeli dla wszystkich zmierzonych par elektronów otrzymamy konfigurację równoległą, to korelator spinowy  $\hat{\sigma}_{z,A} \otimes \hat{\sigma}_{z,B}$  będzie miał wartość 1, jeżeli otrzymamy konfigurację antyrównoległą otrzymamy  $-1$ , a jeżeli obie konfiguracje będą występowały z jednakowym prawdopodobieństwem wartość korelatora spinowego będzie wynosić 0.

Dla układu, w którym mamy do czynienia z czystym stanem singletowym (7.12) operator świadka splątania można przedstawić w postaci [107]:

$$\mathcal{W}^{(p)} = \frac{1}{2} \left( I + \hat{\sigma}_x^{(p)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(p)} + \hat{\sigma}_y^{(p)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(p)} + \hat{\sigma}_z^{(p)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(p)} \right). \quad (7.41)$$

Można pokazać, że wartość oczekiwana świadka, dla stanu singletowego wynosi:

$$\langle \mathcal{W}^{(p)} \rangle \equiv \text{Tr} [\mathcal{W}^{(p)} \rho_{AB}] = \frac{1}{2} (1 - 3p^2). \quad (7.42)$$

Zgodnie z definicją operatora świadka splątania (7.8) wymagane jest, aby otrzymana wartość oczekiwana była ujemna, co jest spełnione dla polaryzacji spinowej:

$$p > \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58. \quad (7.43)$$

Uzyskana wartość polaryzacji spinowej określa dolną granicę jakości detektorów ferromagnetycznych, niezbędną do wykrycia singletowego stanu splątanego.

Ponieważ pomiar obu elektronów odbywa się niezależnie, z taką samą sprawnością  $p$ , możemy potraktować pomiar za pomocą nieidealnych detektorów ferromagnetycznych jako przejście każdej cząstki przez niezależny kanał depolaryzujący, co w rezultacie daje stan Wernera [13, 108]:

$$\mathcal{E}_A \otimes \mathcal{E}_B (|\Psi^-\rangle \langle \Psi^-|_{AB}) = p^2 |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-|_{AB} + (1 - p^2) \frac{I}{4} \equiv \rho_{AB}^W(p^2), \quad (7.44)$$

gdzie parametrowi widzialności  $\lambda$  odpowiada kwadrat polaryzacji spinowej  $p^2$ , a następnie pomiar przez idealne detektory z wartością oczekiwaną:

$$\langle \mathcal{W} \rangle \equiv \text{Tr} \left[ \mathcal{W} \rho_{AB}^W(p^2) \right] , \quad (7.45)$$

co jak można pokazać daje wynik zgodny z przedstawionym w równaniu (7.42).

Ponieważ rzeczywiste detektory ferromagnetyczne wytwarzane są w układach warstwowych pojawić się może trudność w pomiarze korelatorów spinowych w kierunku prostopadłym do płaszczyzny detektora. W celu wyeliminowania tego problemu możliwe jest zastosowanie operatora świadka splątania o zredukowanej liczbie korelatorów spinowych, odpowiadających pomiarowi w płaszczyźnie  $xy$  [107, 109, 110, 111]:

$$\mathcal{V}_{xy} = \frac{1}{2} (I + \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y) . \quad (7.46)$$

Podobnie jak poprzednio możemy obliczyć minimalną polaryzację spinową niezbędną dla detekcji spinowego stanu singletowego:

$$\langle \mathcal{V}_{xy} \rangle \equiv \text{Tr} \left[ \mathcal{V}_{xy} \rho_{AB}^W(p^2) \right] = \frac{1}{2} (1 - 2p^2) , \quad (7.47)$$

co daje wartość ujemną dla polaryzacji spinowej:

$$p > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71 . \quad (7.48)$$

Dla izotropowego układu warunek ten jest spełniony także dla pomiarów wzdłuż pozostałych kierunków, za pomocą świadków splątania:

$$\mathcal{V}_{xz} = \frac{1}{2} (I + \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z) , \quad (7.49)$$

$$\mathcal{V}_{yz} = \frac{1}{2} (I + \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z) . \quad (7.50)$$

Porównując wymagane polaryzacje (7.43) i (7.48), widzimy, że ograniczenie liczby korelatorów spinowych, a więc łatwiejszy pomiar, wymusza zastosowanie detektorów o lepszej jakości (większej polaryzacji spinowej). W Dodatku B został przedstawiony dowód, że zaproponowane operatory  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{V}_{xy}$ ,  $\mathcal{V}_{xz}$ ,  $\mathcal{V}_{yz}$  są rzeczywiście świadkami splątania.



### 7.3.4. Nierówności Bella - nierówność CHSH

W poprzednim podrozdziale przedstawione zostały wymagania stawiane detektorom ferromagnetycznym, aby możliwe było zastosowanie detekcji za pomocą operatora świadka splątania. Kolejnym krokiem jest sprawdzenie, jakie wymagania muszą zostać spełnione aby można było przetestować łamanie nierówności Bella i porównanie wymaganej polaryzacji spinowej z detekcją za pomocą świadka splątania.

Łamanie nierówności Bella przeanalizujemy na przykładzie nierówności CHSH. Operator związany z nierównością CHSH (7.1) ma postać [112]:

$$\mathcal{B}_{CHSH} = \vec{a} \cdot \hat{\sigma} \otimes (\vec{b} + \vec{d}) \cdot \hat{\sigma} + \vec{c} \cdot \hat{\sigma} \otimes (\vec{b} - \vec{d}) \cdot \hat{\sigma}, \quad (7.51)$$

gdzie  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  i  $\vec{d}$  są arbitralnymi wektorami jednostkowymi. Wówczas nierówność CHSH (7.1) ma postać:

$$|\langle \mathcal{B}_{CHSH} \rangle_{\rho_{AB}}| \leq 2. \quad (7.52)$$

Maksymalne łamanie nierówności,  $|\langle \mathcal{B}_{CHSH} \rangle_{\rho_{AB}}| = 2\sqrt{2}$  dla stanu singletowego, następuje dla kierunków pomiaru:

$$\vec{a} = (1, 0, 0), \quad (7.53)$$

$$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \quad (7.54)$$

$$\vec{c} = (0, 0, 1), \quad (7.55)$$

$$\vec{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1). \quad (7.56)$$

Jak pokazano w pracy Horodeckich [112], układ składający się z dwóch kubitów,  $\rho_{AB}$  łamie nierówność CHSH wtedy, gdy:

$$\max_{\mathcal{B}_{CHSH}} |\langle \mathcal{B}_{CHSH} \rangle_{\rho_{AB}}| = \sqrt{\varsigma_1 + \varsigma_2} > 1, \quad (7.57)$$

gdzie  $\varsigma_1 \geq \varsigma_2 \geq \varsigma_3$  są uporządkowanymi wartościami własnymi macierzy  $R^T R$ , gdzie:

$$R_{ij} = \text{Tr}[(\hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j) \rho_{AB}]. \quad (7.58)$$

Podstawiając  $\mathcal{O} = \mathcal{B}_{CHSH}$  w równaniu (7.31), pomiar maksymalnie splątanego stanu za pomocą nieidealnych detektorów może być zamieniony na pomiar stanu Wernera (7.44) idealnymi detektorami ferromagnetycznymi. Można pokazać, że wszystkie wartości własne

$R^T R$  mają postać  $\varsigma_i = p^4$ . Korzystając z równania (7.57) otrzymujemy wymaganą spinową polaryzację detektorów, niezbędną do wykrycia łamania nierówności CHSH [113]:

$$p > \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx 0.84. \quad (7.59)$$

Uzyskany wynik pokazuje, że detekcja stanu splątania kwantowego za pomocą testowania łamania nierówności Bella wymaga detektorów o wysokiej polaryzacji spinowej. Zatem w analizowanym układzie detekcja za pomocą operatora świadka splątania pozwala na stosowanie łatwiej dostępnych, mniej idealnych ferromagnetycznych detektorów.

### 7.3.5. Nieidealne źródło splątanych elektronów

W poprzednich podrozdziałach rozpatrywaliśmy detekcję czystego singletowego stanu spinowego (7.12) za pomocą operatora świadka splątania i nierówności Bella. Rozpatrzmy teraz wpływ nieidealnego źródła splątanych elektronów na wymagania stawiane detektorom ferromagnetycznym. Stan wejściowy, otrzymywany przez nieidealne źródło elektronów w stanie splątanym, modelujemy za pomocą stanu Wernera (7.13) z parametrem widzialności  $\lambda$ . Obrazując pomiar nieidealnymi detektorami za pomocą kanałów depolaryzujących i idealnego pomiaru otrzymujemy:

$$\mathcal{E}_A \otimes \mathcal{E}_B \left( \rho_{AB}^W(\lambda) \right) = \lambda p^2 |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-|_{AB} + (1 - \lambda p^2) \frac{I}{4} \equiv \rho_{AB}^W(\lambda p^2), \quad (7.60)$$

czyli stan Wernera z parametrem widzialności  $\lambda p^2$ . Postępując analogicznie do obliczeń przestawionych dla stanu (7.44) otrzymujemy wartości oczekiwane operatorów świadka splątania:

$$\langle \mathcal{W} \rangle \equiv Tr \left[ \mathcal{W} \rho_{AB}^W(\lambda p^2) \right] = \frac{1}{2} (1 - 3\lambda p^2), \quad (7.61)$$

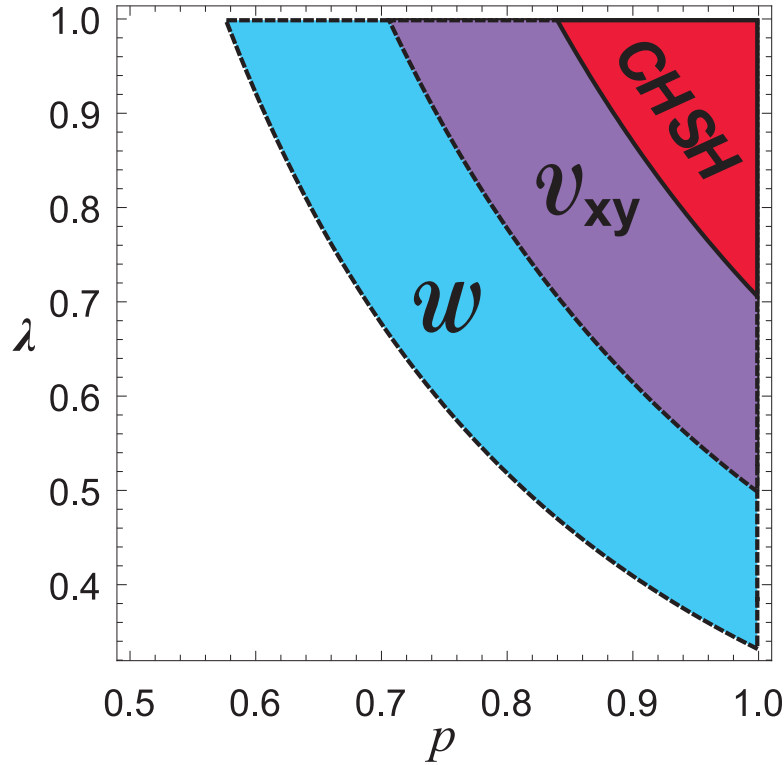
$$\langle \mathcal{V}_{xy} \rangle \equiv Tr \left[ \mathcal{V}_{xy} \rho_{AB}^W(\lambda p^2) \right] = \frac{1}{2} (1 - 2\lambda p^2), \quad (7.62)$$

oraz  $\langle \mathcal{V}_{xy} \rangle = \langle \mathcal{V}_{xz} \rangle = \langle \mathcal{V}_{yz} \rangle$  z uwagi na symetrię stanu  $\rho_{AB}^W(\lambda p^2)$ . Podobnie otrzymujemy warunek łamania nierówności CHSH:

$$2\lambda^2 p^4 > 1. \quad (7.63)$$

Na Rysunku 7.6 zostały przedstawione zakresy stosowalności operatorów świadka splątania oraz nierówności CHSH w funkcji spinowej polaryzacji  $p$  oraz parametru widzialności  $\lambda$  dla detekcji stanu Wernera. Jak można było przypuszczać, zwiększenie poziomu szumu

wymaga lepszych detektorów ferromagnetycznych charakteryzujących się większą polaryzacją spinową.



Rysunek 7.7. Zakresy stosowalności operatorów świadka splątania  $\mathcal{W}$  i  $\mathcal{V}_{xy}$  oraz nierówności CHSH, w zależności od polaryzacji spinowej  $p$  i parametru widzialności  $\lambda$ . Największy zakres stosowalności pod względem polaryzacji spinowej i parametru widzialności otrzymujemy dla świadka splątania  $\mathcal{W}$ .

### 7.3.6. Relaksacja spinowa i rozfazowanie

Wpływ relaksacji i rozfazowania spinów elektronów w rzeczywistych kanałach transportowych nie jest opisany przez stan Wernera i warto przeanalizować ich wpływ. W celu uwzględnienia wspomnianych efektów skorzystamy z fenomenologicznego modelu spinowej dekoherencji (równania Blocha) używanego w celu otrzymania granicznych czasów relaksacji  $T_1$  i rozfazowania  $T_2$  w detekcji stanu splątanego za pomocą łamania nierówności CHSH [114, 115].

Spinową dekoherencję można opisać za pomocą kanału  $\Lambda$ , który działa na każdą cząstkę w następujący sposób:

$$|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \xrightarrow{\Lambda} \frac{1+\omega_1}{2} |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1-\omega_1}{2} |\downarrow\rangle\langle\downarrow|, \quad (7.64)$$

$$|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \xrightarrow{\Lambda} \frac{1+\omega_1}{2} |\downarrow\rangle\langle\downarrow| + \frac{1-\omega_1}{2} |\uparrow\rangle\langle\uparrow|, \quad (7.65)$$

$$|\uparrow\rangle\langle\downarrow| \xrightarrow{\Lambda} \omega_2 |\uparrow\rangle\langle\downarrow| , \quad (7.66)$$

$$|\downarrow\rangle\langle\uparrow| \xrightarrow{\Lambda} \omega_2 |\downarrow\rangle\langle\uparrow| , \quad (7.67)$$

gdzie  $\omega_1 = \exp(-t_L/T_1)$ ,  $\omega_2 = \exp(-t_L/T_2)$ ,  $T_1$  i  $T_2$  oznaczają odpowiednio czasy spinowej relaksacji i rozfazowania, które pochodzą z równań Blocha dla spinów elektronu,  $t_L = L/v_F$  jest czasem balistycznej transmisji poprzez kanał transportowy o długości  $L$ ,  $v_F$  oznacza prędkość Fermiego. W tym modelu czas rozfazowania zawiera czyste rozfazowanie, jak również rozfazowanie wynikające z procesów relaksacyjnych, które w ogólności są powiązane w następujący sposób:

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2T_1} + \frac{1}{T_2^*} , \quad (7.68)$$

gdzie  $T_2^*$  jest czasem charakteryzującym prędkość rozfazowania precesji momentów magnetycznych. W szczególnym przypadku, dla czystej relaksacji ( $\frac{1}{T_2^*} = 0$ ), spełniona jest zależność  $T_2 = 2T_1$ .

Zakładając, że dekoherencja i relaksacja przebiegają w każdym kanale niezależnie od siebie, czysty stan singletowy przechodzi w stan:

$$\rho_{AB}^{decoh} = \Lambda_A \otimes \Lambda_B \left( |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|_{AB} \right) , \quad (7.69)$$

który nie jest stanem Wernera, ale jest diagonalny w bazie Bella.

Wartości oczekiwane operatorów świadka splątania wynoszą:

$$\langle \mathcal{W} \rangle \equiv \text{Tr} \left( \mathcal{W} \rho_{AB}^{decoh} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \omega_1^2 - 2\omega_2^2 \right) , \quad (7.70)$$

$$\langle \mathcal{V}_{xy} \rangle \equiv \text{Tr} \left( \mathcal{V}_{xy} \rho_{AB}^{decoh} \right) = \frac{1}{2} - \omega_2^2 , \quad (7.71)$$

$$\langle \mathcal{V}_{xz} \rangle \equiv \text{Tr} \left( \mathcal{V}_{xz} \rho_{AB}^{decoh} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \omega_1^2 - \omega_2^2 \right) , \quad (7.72)$$

$$\langle \mathcal{V}_{yz} \rangle \equiv \text{Tr} \left( \mathcal{V}_{yz} \rho_{AB}^{decoh} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \omega_1^2 - \omega_2^2 \right) . \quad (7.73)$$

Istotną różnicą w porównaniu do poprzednio uzyskanych wartości świadka splątania, jest brak symetrii dla zredukowanych świadków splątania  $\langle \mathcal{V}_{ij} \rangle$ . Wynika to niesymetrycznego charakteru dekoherencji opisanej równaniami (7.64) - (7.67).

Warunek łamania nierówności CHSH ma postać:

$$\max \{2\omega_2^4, \omega_1^4 + \omega_2^4\} > 1 . \quad (7.74)$$

Maksymalne łamanie nierówności CHSH, dla  $T_1 < T_2$  następuje przy wyborze kierunków:

$$\vec{a} = (1, 0, 0) , \quad (7.75)$$

$$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, -1, 0) , \quad (7.76)$$

$$\vec{c} = (0, 1, 0) , \quad (7.77)$$

$$\vec{d} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0) , \quad (7.78)$$

a dla  $T_1 > T_2$ :

$$\vec{a} = (0, 0, 1) , \quad (7.79)$$

$$\vec{b} = (-\sin \theta, 0, -\cos \theta) , \quad (7.80)$$

$$\vec{c} = (1, 0, 0) , \quad (7.81)$$

$$\vec{d} = (\sin \theta, 0, -\cos \theta) , \quad (7.82)$$

gdzie:

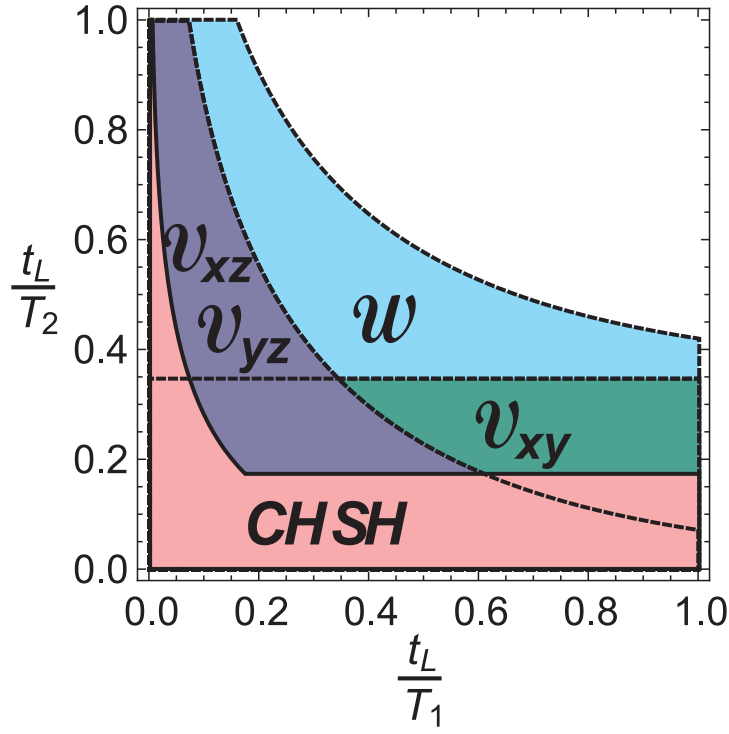
$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \exp(-4\Theta)}} , \quad (7.83)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \exp(4\Theta)}} , \quad (7.84)$$

$$\Theta = t_L \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) . \quad (7.85)$$

Na Rysunku 7.8 zostały przedstawione zakresy  $t_L/T_1$  i  $t_L/T_2$ , dla których wartości średnie operatorów świadka splątania są ujemne, czyli obszary w których świadek splątania wykrywa stan splątany, oraz granicę łamania nierówności CHSH. Na podstawie otrzymanego wykresu widzimy, że detekcja stanu splątania kwantowego za pomocą operatora świadka splątania jest możliwa w szerszym zakresie czasów relaksacji i rozfazowania, w porównaniu z detekcją za pomocą testowania łamania nierówności CHSH.

Analizę powyższą można uogólnić na stan Wernera, stosując podejście w którym stan początkowy  $\rho_{AB}^W$  przechodzi przez kanały transportowe, gdzie następuje relaksacja i dekoherencja ( $\Lambda_A \otimes \Lambda_B$ ) oraz depolaryzacja ( $\mathcal{E}_A \otimes \mathcal{E}_B$ ), a następnie dokonywany jest pomiar



Rysunek 7.8. Zakresy ujemności operatorów świadka splątania i łamania nierówności CHSH.

za pomocą idealnych detektorów. Przejście przez kanały transportowe powoduje zmianę stanu na:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_A \otimes \mathcal{E}_B \left( \Lambda_A \otimes \Lambda_B \left( \rho_{AB}^W(\lambda) \right) \right) &= \Lambda_A \otimes \Lambda_B \left( \mathcal{E}_A \otimes \mathcal{E}_B \left( \rho_{AB}^W(\lambda) \right) \right) \\ &= \Lambda_A \otimes \Lambda_B \left( \rho_{AB}^W(\lambda p^2) \right) = \rho_{AB}^{decoh}(\lambda p^2) . \end{aligned} \quad (7.86)$$

Na podstawie otrzymanego wyrażenia możemy obliczyć wartości oczekiwane świadków splątania:

$$\langle \mathcal{W} \rangle \equiv \text{Tr} \left( \mathcal{W} \rho_{AB}^{decoh}(\lambda p^2) \right) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \lambda p^2 (\omega_1^2 + 2\omega_2^2) \right] , \quad (7.87)$$

$$\langle \mathcal{V}_{xy} \rangle \equiv \text{Tr} \left( \mathcal{V}_{xy} \rho_{AB}^{decoh}(\lambda p^2) \right) = \frac{1}{2} - \lambda p^2 \omega_2^2 , \quad (7.88)$$

$$\langle \mathcal{V}_{xz} \rangle = \langle \mathcal{V}_{yz} \rangle \equiv \text{Tr} \left( \mathcal{V}_{yz} \rho_{AB}^{decoh}(\lambda p^2) \right) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \lambda p^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) \right] . \quad (7.89)$$

Splątanie kwantowe jest wykrywane wtedy, gdy powyższe wartości są ujemne. Łamanie nierówności CHSH następuje wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$\max \left\{ 2\lambda^2 p^4 \omega_2^4, \lambda^2 p^4 (\omega_1^4 + \omega_2^4) \right\} > 1 . \quad (7.90)$$

Wyrażenia (7.87) - (7.90) pokazują, że obecność relaksacji spinowej i rozfazowania wymusza stosowanie detektorów o wyższej polaryzacji spinowej i źródeł splątanych par elektro-

nów charakteryzujących się większym parametrem widzialności  $\lambda$ , w celu wykrycia stanu splątanego.

### 7.3.7. Asymetryczne detektory ferromagnetyczne

Poprzednio ograniczyliśmy się do układu, w którym detektory ferromagnetyczne charakteryzowały się identyczną polaryzacją spinową  $p$ . Rozpatrzmy teraz układ, w którym polaryzacje detektorów są różne i wynoszą  $p_A$  i  $p_B$ . Stan Wernera po przejściu przez kanały depolaryzujące, przy założeniu asymetrii detektorów  $p_A \neq p_B$ , będzie miał postać [116]:

$$\mathcal{E}_A \otimes \mathcal{E}_B \rho_{AB}^W(\lambda) = \rho_{AB}^W(\lambda p_A p_B) . \quad (7.91)$$

Wartości oczekiwane operatorów świadka splątania wynoszą:

$$\langle \mathcal{W} \rangle \equiv \text{Tr} \left( \mathcal{W} \rho_{AB}^W(\lambda p_A p_B) \right) = \frac{1}{2} (1 - 3\lambda p_A p_B) , \quad (7.92)$$

$$\langle \mathcal{V}_{xy} \rangle = \langle \mathcal{V}_{xz} \rangle = \langle \mathcal{V}_{yz} \rangle \equiv \text{Tr} \left( \mathcal{V}_{yz} \rho_{AB}^W(\lambda p_A p_B) \right) = \frac{1}{2} (1 - 2\lambda p_A p_B) . \quad (7.93)$$

W celu detekcji za pomocą łamania nierówność CHSH konieczne jest spełnienie warunku:

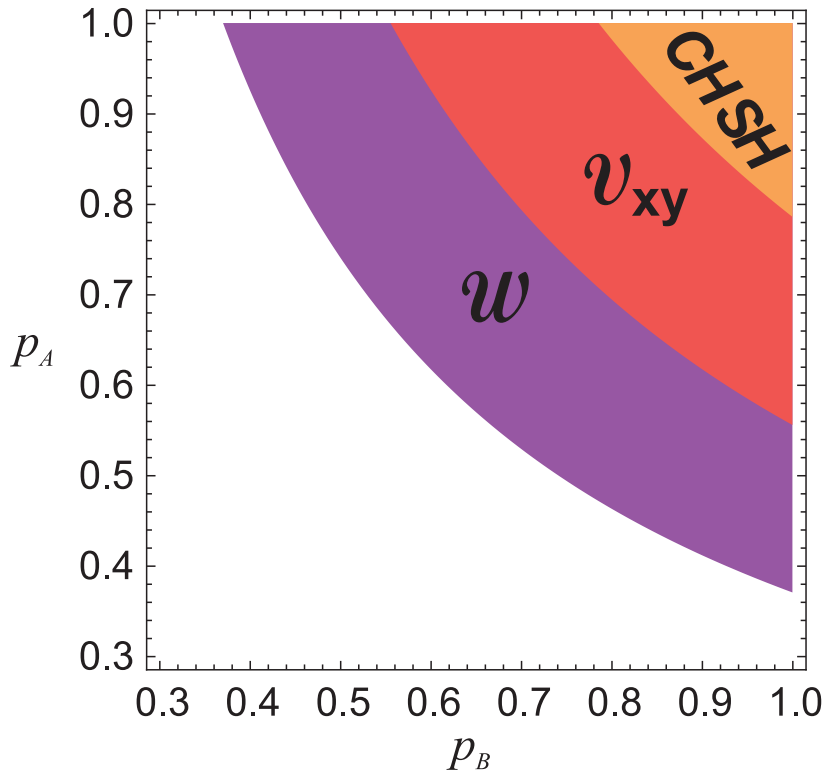
$$1 - \sqrt{2}\lambda p_A p_B < 0 . \quad (7.94)$$

Rysunek 7.9 przedstawia wymaganą polaryzację spinową asymetrycznych detektorów ferromagnetycznych do detekcji stanu splątania kwantowego, dla  $\lambda = 0.9$

Dzięki zastosowaniu jednego detektora ferromagnetycznego o wysokiej polaryzacji spinowej, możemy obniżyć wymagania wobec drugiego detektora. Minimalna polaryzacja spinowa pojedynczego detektora przy detekcji za pomocą świadka splątania  $\mathcal{W}$  wynosi  $p = 1/3$ , jednakże drugi detektor musi być wówczas idealny ( $p = 1$ ), przy założeniu, że źródło cechuje się idealną widzialnością  $\lambda = 1$ .

## 7.4. Podsumowanie

Zaproponowane przez nas zastosowanie operatora świadka splątania, jako metody detekcji stanu splątania kwantowego elektronów pozwala na obniżenie wymagań wobec detektorów ferromagnetycznych, w porównaniu do detekcji za pomocą łamania nierówności CHSH. Jednakże obniżenie wymaganej polaryzacji do poziomu 58% (dla symetrycznego



Rysunek 7.9. Zakresy polaryzacji spinowej asymetrycznych detektorów  $p_A$  i  $p_B$ , w których możliwa jest detekcja stanu splątania kwantowego za pomocą operatora świadka splątania i testowania łamania nierówności CHSH, dla źródła o parametrze widzialności  $\lambda = 0.9$ .

układu) w dalszym ciągu stanowi wyzwanie dla eksperymentatorów, gdyż powszechnie używane detektory ferromagnetyczne (np. Ni, Co, Fe), charakteryzują się polaryzacją spinową na poziomie 30-50%. W związku z tym konieczne jest zastosowanie nowych materiałów ferromagnetycznych o wyższej polaryzacji spinowej. W zasadzie, polaryzację zbliżoną do 100% powinno się uzyskać dla półmetali, ale można spotkać w literaturze doniesienia o różnych materiałach charakteryzujących się wysoką polaryzacją spinową. Dla tlenku chromu  $\text{CrO}_2$  odnotowano polaryzację spinową na poziomie 90% [117, 118], a dla stopów Heuslera otrzymano polaryzację sięgającą 74% [119]. Zademonstrowano również nanoelektroniczne urządzenie z połączeniami wykonanymi z materiału  $\text{La}_{0.7}\text{Sr}_{0.3}\text{MnO}_3$  (LSMO) o polaryzacji rzędu 80% [120]. Możemy zaproponować również eksperyment możliwy do wykonania za pomocą dwóch detektorów o dowolnej kolinearnej polaryzacji spinowej  $p > 0$ , polegający na pomiarze korelatorów spinowych  $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$ . Uzyskanie wyniku pomiaru  $\langle \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \rangle < 0$  stanowić będzie potwierdzenie, że dwa elektrony pary Coopera emitowane przez źródło mają przeciwne spiny.

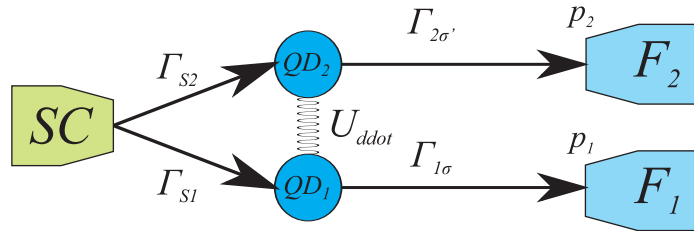
Pokazano również wpływ relaksacji spinowej i rozfazowania na obie metody detekcji. Również w tym przypadku, użycie operatora świadka splątania jest możliwe w szerszym zakresie czasów relaksacji i rozfazowania.



## Rozdział 8

# Detekcja stanu splątania kwantowego par Coopera za pomocą pomiarów prądu elektrycznego

W niniejszym rozdziale przedstawiona zostanie możliwość wykrywania splątania kwantowego za pomocą bezpośrednich pomiarów prądu stałego w układzie podwójnej kropki kwantowej sprzężonej z elektrodą nadprzewodzącą i dwoma elektrodami ferromagnetycznymi (Rysunek 8.1). Przedstawione zostaną wymagania pod względem minimalnej polaryzacji spinowej, jakie muszą spełniać detektory ferromagnetyczne, aby można było wykryć stan splątany par Coopera.



Rysunek 8.1. Schemat układu podwójnej kropki kwantowej sprzężonej z elektrodą nadprzewodzącą i dwoma elektrodami ferromagnetycznymi.

### 8.1. Model

Rozpatrujemy układ podwójnej kropki kwantowej, gdzie oddziaływania kulombowskie pomiędzy kropkami wynoszą  $U_{ddot}$ , a każda kropka charakteryzuje się pojedynczym poziomem energetycznym  $\epsilon_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$  oznacza indeks kropki kwantowej). Zakładamy, że pojedyncza kropka kwantowa nie może być podwójnie obsadzona, z powodu silnych wewnętrznych oddziaływań kulombowskich. Kropki kwantowe są sprzężone z elektrodą nadprzewodzącą i dwoma elektrodami ferromagnetycznymi.

Przedstawiona analiza układu bazuje na pracy [57] omówionej w Rozdziale 2, która dotyczyła użycia normalnych elektrod w celu rozdzielenia par Coopera. W tym rozdziale

zastosujemy elektrody ferromagnetyczne w celu detekcji stanu splątania kwantowego. Hamiltonian kropek kwantowych ma postać:

$$H_{ddot} = \sum_{\alpha\sigma} \epsilon_{\alpha\sigma} n_{\alpha\sigma} + U_{ddot} \sum_{\sigma\sigma'} n_{1\sigma} n_{2\sigma'} , \quad (8.1)$$

gdzie  $n_{\alpha\sigma}$  jest operatorem liczby cząstek w kropce kwantowej  $\alpha$ ,  $\sigma$  oznacza spin elektronu,  $U_{ddot}$  jest energią oddziaływania kulombowskiego pomiędzy kropkami kwantowymi.

Tunelowanie pomiędzy kropkami kwantowymi a elektrodami opisują Hamiltoniany:

$$H_{TF} = \sum_{\mathbf{k}\alpha\sigma} \left( t_{F\alpha} c_{\mathbf{k}\alpha\sigma}^\dagger d_{\alpha\sigma} + h.c. \right) , \quad (8.2)$$

$$H_{TS} = \sum_{\mathbf{k}\alpha\sigma} \left( t_{S\alpha} c_{\mathbf{k}S\sigma}^\dagger d_{\alpha\sigma} + h.c. \right) , \quad (8.3)$$

gdzie indeksy  $F, S$  oznaczają odpowiednio elektrodę ferromagnetyczną i nadprzewodzącą,  $c_{\mathbf{k}\alpha(S)\sigma}^\dagger$  są operatorami kreacji elektronów o wektorze falowym  $\mathbf{k}$  i spinie  $\sigma$  w elektrodzie ferromagnetycznej  $\alpha$  lub elektrodzie nadprzewodzącej,  $d_{\alpha\sigma}$  są operatorami anihilacji elektronów o spinie  $\sigma$  z kropki kwantowej  $\alpha$ , a  $t_{S(F)\alpha}$  oznaczają amplitudy macierzy tunelowania pomiędzy elektrodami a kropkami kwantowymi.

Sprzężenia w układzie ze względu na obecność ferromagnetycznych elektrod będą teraz zależeć od spinu [121]:

$$\Gamma_{F\alpha\uparrow} = 2\pi N_{\alpha\uparrow} |t_{F\alpha}|^2 = \frac{1}{2} (1 + p_\alpha) \Gamma_{F\alpha} , \quad (8.4)$$

$$\Gamma_{F\alpha\downarrow} = 2\pi N_{\alpha\downarrow} |t_{F\alpha}|^2 = \frac{1}{2} (1 - p_\alpha) \Gamma_{F\alpha} , \quad (8.5)$$

gdzie założono:

$$\Gamma_{F\alpha} = \Gamma_{F\alpha\uparrow} + \Gamma_{F\alpha\downarrow} , \quad (8.6)$$

oraz:

$$\Gamma_{S\alpha} = 2\pi N_S |t_{S\alpha}|^2 , \quad (8.7)$$

gdzie  $N_S$  oznacza gęstość stanów w nadprzewodniku w stanie normalnym.

Dynamikę układu możemy opisać za pomocą Hamiltonianu efektywnego [57]:

$$H_{eff} = H_{ddot} - \frac{\Gamma_S}{2} \left( d_{2\uparrow}^\dagger d_{1\downarrow}^\dagger - d_{2\downarrow}^\dagger d_{1\uparrow}^\dagger + h.c. \right) , \quad (8.8)$$

gdzie  $\Gamma_S = \sqrt{\Gamma_{S1}\Gamma_{S2}}$ . Drugi człon równania (8.8) opisuje efektywnie nielokalny efekt

bliskości, czyli tworzenie nielokalnych nadprzewodzących singletowych korelacji pomiędzy kropkami kwantowymi, co zostało omówione w Rozdziale 5. W wyniku diagonalizacji efektywnego hamiltonianu otrzymujemy nowe stany, będące sprzężeniem stanu  $|0\rangle$  (nieobsadzonych kropek kwantowych) i stanu singletowego  $|S\rangle$ :

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \mp \frac{\delta}{2\epsilon_A}} |0\rangle \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \frac{\delta}{2\epsilon_A}} |S\rangle, \quad (8.9)$$

gdzie  $\delta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + U_{d\dot{d}}$ . Energie stanów w diagonalnej bazie wynoszą:

$$E_{\pm} = \delta/2 \pm \epsilon_A, \quad (8.10)$$

gdzie:

$$\epsilon_A = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\Gamma_{S1}\Gamma_{S2}}{2}}. \quad (8.11)$$

Z powyższego wynika, że nielokalny efekt bliskości zmienia stan podstawowy układu.

Szybkość tunelowania  $W_{\chi\chi'}$  pomiędzy stanami  $\chi, \chi'$  obliczamy korzystając ze złotej reguły Fermiego [57, 122]. Prawdopodobieństwa obsadzeń spełniają równanie:

$$\sum_{\chi \neq \chi'} (W_{\chi\chi'} P_{\chi'} - W_{\chi'\chi} P_{\chi}) = 0, \quad (8.12)$$

gdzie prawdopodobieństwa  $P_{\chi}$  są znormalizowane,  $\sum_{\chi} P_{\chi} = 1$ . Prąd płynący w elektrodzie  $\alpha$  możemy uzyskać na podstawie wyrażenia:

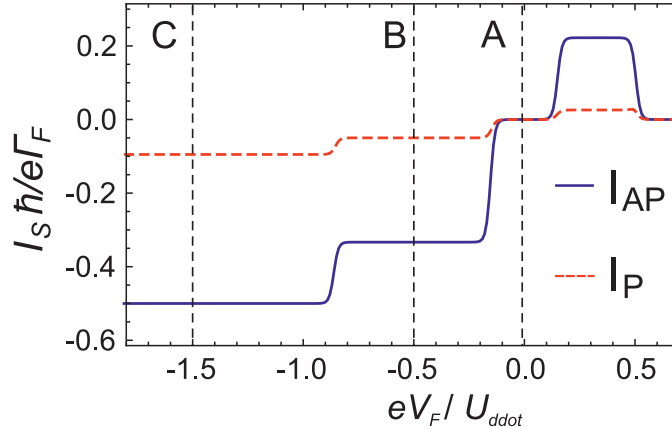
$$I_{\alpha} = \frac{e}{\hbar} \sum_{i \neq j} P_{\chi} W_{\chi'\chi}^{\alpha}, \quad (8.13)$$

$$I_S = -I_1 - I_2, \quad (8.14)$$

gdzie  $e$  jest ładunkiem elektronu,  $W_{\chi'\chi}^{\alpha}$  uwzględnia liczbę elektronów przeniesionych pomiędzy elektrodą  $\alpha$  a kropką kwantową  $QD_{\alpha}$ .

Na Rysunku 8.2 przedstawiono zależność prądu od napięcia, obliczonego dla dwóch konfiguracji magnetyzacji elektrod. Symbolem  $I_{AP}$  oznaczono konfigurację, w której magnetyzacje elektrod ferromagnetycznych skierowane są antyrównoległe, a symbolem  $I_P$  konfigurację równoległą. Układ jest symetryczny pod względem przyłożonego napięcia  $eV_{F1} = eV_{F2} = eV_F$ , sprzężeń  $\Gamma_{F1} = \Gamma_{F2}$  i energii kropek kwantowych  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ . Polaryzacja spinowa  $p_1 = p_2 = p = 0.9$ ,  $\delta/U_{d\dot{d}} = 0$ ,  $k_B T = 0.01 U_{d\dot{d}}$ ,  $\Gamma_S/U_{d\dot{d}} = 0.5$ . Na wykresie zaznaczono trzy charakterystyczne punkty, do których odnoszone będą dalsze wyniki, odpo-

wiadające napięciom: C:  $eV_F/U_{ddot} = -1.5$ , B:  $eV_F/U_{ddot} = -0.5$ , A:  $eV_F/U_{ddot} = -0.01$ .



Rysunek 8.2. Prąd  $I_S$  w funkcji symetrycznego napięcia  $eV_F/U_{ddot}$ , dla symetrycznego układu pod względem sprzężeń  $\Gamma_{F1} = \Gamma_{F2}$  i energii kropek kwantowych  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ . Linia ciągła oznaczoną prąd dla antyrównoległej konfiguracji elektrod ferromagnetycznych, a linia kreskowana odpowiada konfiguracji równoległej. Polaryzacja spinowa  $p_1 = p_2 = p = 0.9$ ,  $\delta/U_{ddot} = 0$ ,  $k_B T = 0.01 U_{ddot}$ ,  $\Gamma_S/U_{ddot} = 0.5$ . Na wykresie zaznaczono trzy charakterystyczne punkty, do których odnoszone będą dalsze wyniki, odpowiadające napięciom: C:  $eV_F/U_{ddot} = -1.5$ , B:  $eV_F/U_{ddot} = -0.5$ , A:  $eV_F/U_{ddot} = -0.01$ .

Schodkowy charakter otrzymanego wykresu jest typowy dla układów z kropkami kwantowymi [123, 124]. Wraz ze zwiększaniem napięcia rośnie liczba stanów biorących udział w przepływie prądu. Tłumienie prądu w obszarze  $eV_F/U_{ddot} > 0.5$  związane jest z blokadą trypletową omawianą w Rozdziale 2 dla układu z elektrodami normalnymi [57]. Widoczna różnica pomiędzy amplitudami prądu dla konfiguracji równoległej i antyrównoległej wynika z tego, że para Coopera składa się z dwóch elektronów o przeciwnych spinach, zatem konfiguracja antyrównoległa jest lepiej dopasowana do antyferromagnetycznego uporządkowania stanu singletowego, a prąd dla tej konfiguracji nie zależy od spinowej polaryzacji, czyli będzie taki sam jak dla elektrod normalnych. Prąd dla konfiguracji równoległej jest silnie zależny od polaryzacji spinowej elektrod ferromagnetycznych i w przypadku idealnej polaryzacji  $p = 1$  ulega całkowitemu stłumieniu.

## 8.2. Detekcja stanu splątania kwantowego

Korzystając z efektu pokazanego na Rysunku 8.2, czyli zależności prądu par Coopera od konfiguracji elektrod ferromagnetycznych, możemy zaproponować detekcję splątania

kwantowego par elektronów za pomocą operatora świadka splątania, w postaci analogicznej do równania (7.40):

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} (I + D_x + D_y + D_z) , \quad (8.15)$$

oraz w postaci zredukowanej do dwóch wymiarów:

$$\mathcal{V}_{ij} = \frac{1}{2} (I + D_i + D_j) , \quad (8.16)$$

gdzie  $i, j \in \{x, y, z\}$ ,  $i \neq j$ . Operatory  $D_i$  można powiązać z korelatorami spinowymi:

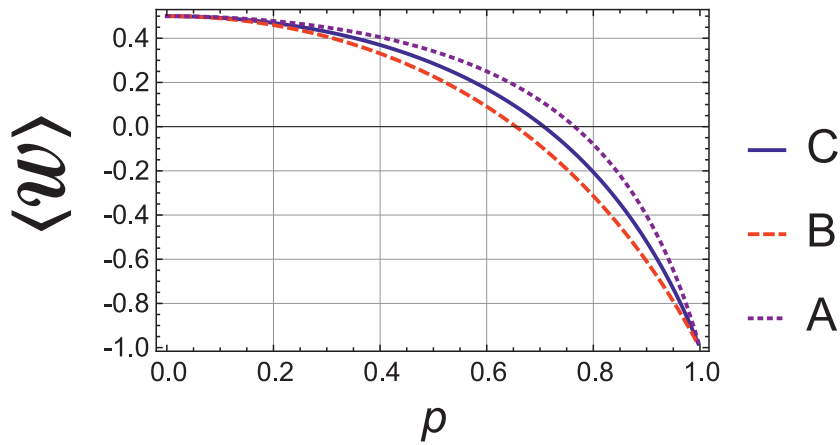
$$D_i \propto \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_i , \quad (8.17)$$

które można zmierzyć, za pomocą spinowo-spolaryzowanego prądu elektrycznego:

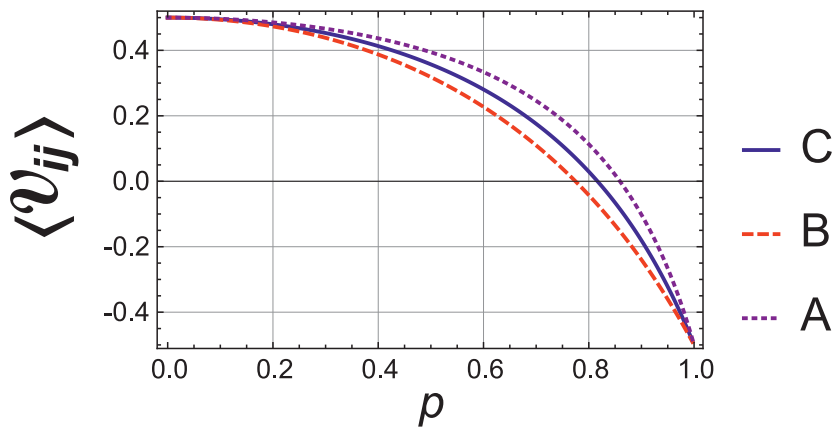
$$\langle D_z \rangle = \frac{I_{\uparrow\uparrow} + I_{\downarrow\downarrow} - I_{\uparrow\downarrow} - I_{\downarrow\uparrow}}{I_{\uparrow\uparrow} + I_{\downarrow\downarrow} + I_{\uparrow\downarrow} + I_{\downarrow\uparrow}} . \quad (8.18)$$

Symbol  $I_{ij}$  oznacza prąd uzyskany dla konfiguracji ferromagnetycznych elektrod, w której elektroda  $\alpha = 1$  ma magnetyzację w kierunku  $i$ , a elektroda  $\alpha = 2$  w kierunku  $j$ , wzdłuż osi  $z$ , np.  $I_{\uparrow\downarrow}$  oznacza konfigurację antyrównoległą, w której elektroda 1 ma magnetyzację skierowaną w górę wzdłuż osi  $z$ , a elektroda 2 ma magnetyzację skierowaną w dół wzdłuż osi  $z$ . Ze względu na symetrię stanu singletowego wartości  $\langle D_x \rangle$  oraz  $\langle D_y \rangle$  mierzone są analogicznie do  $\langle D_z \rangle$ . Zostało sprawdzone, że dla wszystkich stanów separowalnych wartości świadków splątania opisanych równaniami (8.15) i (8.16) są dodatnie, czyli operatory  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{V}_{ij}$  zgodnie z definicją są świadkami splątania.

Korzystając z uzyskanych charakterystyk prądowo-napięciowych na Rysunkach 8.3 i 8.4 przedstawiono wartości oczekiwane świadków splątania  $\mathcal{W}$  i  $\mathcal{V}_{ij}$  w funkcji polaryzacji spinowej  $p$ , dla symetrycznego układu, dla trzech napięć ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) zaznaczonych na Rysunku 8.2. Zakres stosowalności operatorów świadka splątania odpowiada obszarom, w których średnia wartość operatora jest ujemna. Na podstawie wykresów, możemy odczytać wymaganą do detekcji minimalną polaryzację spinową elektrod ferromagnetycznych. Podobnie jak poprzednio, ograniczenie pomiarów do dwóch wymiarów powoduje wzrost wymaganej polaryzacji spinowej. Dla operatora  $\mathcal{W}$  wymagane polaryzacje spinowe w zależności od przyłożonego napięcia wynoszą:  $p(C) > 0.707$ ,  $p(B) > 0.654$ ,  $p(A) > 0.765$ , a dla zredukowanego operatora świadka splątania  $\mathcal{V}_{ij}$ :  $p(C) > 0.817$ ,  $p(B) > 0.775$ ,  $p(A) > 0.859$ .



Rysunek 8.3. Zależność wartości oczekiwanej operatora świadka splątania  $\mathcal{W}$  od polaryzacji, dla trzech charakterystycznych punktów zaznaczonych na Rysunku 8.2. Detekcja splątania jest możliwa dla następujących polaryzacji spinowych:  $p(C) > 0.707$ ,  $p(B) > 0.654$ ,  $p(A) > 0.765$ .



Rysunek 8.4. Zależność wartości oczekiwanej operatora świadka splątania  $\mathcal{V}_{ij}$  od polaryzacji, dla trzech charakterystycznych punktów zaznaczonych na Rysunku 8.2. Detekcja splątania jest możliwa dla następujących polaryzacji spinowych:  $p(C) > 0.817$ ,  $p(B) > 0.775$ ,  $p(A) > 0.859$ .

### 8.3. Podsumowanie

W rozdziale przeanalizowano układ podwójnej kropki kwantowej sprzężonej z elektrodą nadprzewodzącą i dwoma elektrodami ferromagnetycznymi. Nadprzewodzący efekt bliskości powoduje, że stan podstawowy kropek kwantowych jest superpozycją stanu singletowego i stanu nieobsadzonych kropek kwantowych. Korzystając ze złotej reguły Fermiego obliczono sekwencyjny prąd płynący przez układ. Pokazano, że prąd płynący w układzie zależy od konfiguracji elektrod ferromagnetycznych. Na podstawie tego efektu zaproponowano detekcję splątania par elektronów za pomocą operatora świadka splątania, bazującą na bezpośrednich pomiarach prądu stałego w układzie dla różnych ustawień magnetyzacji elektrod ferromagnetycznych. Przedstawiono wymagania jakie muszą być spełnione pod względem minimalnej polaryzacji spinowej detektorów, dla trzech charakterystycznych wartości napięcia: C:  $eV_F/U_{ddot} = -1.5$ , B:  $eV_F/U_{ddot} = -0.5$ ,

---

A:  $eV_F/U_{ddot} = -0.01$ . Aby możliwa była detekcja splątania kwantowego par Coopera minimalna polaryzacja spinowa detektorów powinna wynosić  $p(C) > 0.707$ ,  $p(B) > 0.654$ ,  $p(A) > 0.765$  dla detekcji za pomocą operatora świadka splątania składającego się z trzech korelatorów  $\mathcal{W}$ , oraz dla zredukowanego operatora świadka splątania  $\mathcal{V}_{ij}$ :  $p(C) > 0.817$ ,  $p(B) > 0.775$ ,  $p(A) > 0.859$ . Detekcja za pomocą zredukowanego świadka splątania wymaga detektorów o większej polaryzacji spinowej niż dla detekcji splątania kwantowego za pomocą operatora  $\mathcal{W}$ .





## Podsumowanie

Celem pracy była analiza teoretyczna związana z rozwojem wysoko wydajnego źródła rozdzielonych przestrzennie, spinowo splątanych elektronów w układzie ciało-stalowym, a także nanourządzeń, które pozwolą na skuteczne wykrywanie i analizę własności elektronowych stanów splątanych.

W pierwszej części pracy przeanalizowany został układ podwójnej kropki kwantowej sprzężonej z dwoma elektrodami nadprzewodzącymi. Badane były procesy odpowiadające za przepływ par Coopera przez układ w sposób rozdzielony i nierozdzielony, dla singletowego stanu podstawowego kropek kwantowych, stanu nieobsadzonych kropek kwantowych oraz stanów trypletowych. Wykazano, że odsunięcie poziomów energetycznych kropek kwantowych od położenia rezonansowego i przejście do zakresu wspóltunelowania pozwala na uzyskanie skorelowanego przepływu par elektronów przez układ przy jednoczesnym zachowaniu wysokiej sprawności rozdzielania par Coopera. Pokazano, że w pobliżu rezonansu sprawność rozdzielania par Coopera wynosi 100%. Poza położeniem rezonansowym dla złącza Josephsona teoretyczna sprawność rozdzielania, dla procesów w zakresie wspóltunelowania, dąży do wartości 66% i 50% odpowiednio poniżej i powyżej rezonansu. Pokazano istnienie blokady rozdzielania par Coopera dla kropek kwantowych będących w stanie trypletowym.

Przedstawiono różnicę we wpływie strumienia pola magnetycznego oraz oddziaływania spin-orbita Rashby na prąd par Coopera płynący przez złącza Josephsona z podwójną kropką kwantową i pierścieniem półprzewodnikowym bez kropek kwantowych. W obu układach uzyskano spójne wyniki, wskazujące na odmienny wpływ efektów Aharonova-Bohma i Aharonova-Cashera, na składowe rozdzielone i nierozdzielone prądu Josephsona. Zbadany efekt Aharonova-Cashera dla par Coopera, który związany jest z efektywną precesją spinu, której podlega poruszający się moment dipolowy w polu elektrycznym na skutek obecności oddziaływania spin-orbita typu Rashby, uwidacznia się w zależności

fazowej rozdzielonego prądu par Coopera. Z kolei efekt Aharonova-Bohma obserwujemy dla nierozdzielonej składowej prądu Josephsona. Dzięki obu efektom pole elektromagnetyczne staje się interesującym narzędziem pozwalającym na sterowanie prądem Josephsona i wzmacnianie, bądź osłabianie, składowych rozdzielonych i nierozdzielonych prądu.

Przeanalizowano wpływ efektu bliskości nadprzewodnika na stan podstawowy podwójnej kropki kwantowej. Pokazano, że procesy wymiany zachodzące przy udziale elektrody nadprzewodzącej prowadzą do singletowego stanu podstawowego elektronów na kropkach kwantowych, który obserwujemy w większości nadprzewodników. Przedstawiono możliwość uzyskania „egzotycznych”, trypletowych, nadprzewodzących stanów splątanych za pomocą oddziaływania spin-orbita Rashby oraz efektu bliskości. Stany te mogą znaleźć zastosowanie w informatyce i protokołach kwantowych.

Zbadano transport w układzie podwójnej kropki kwantowej sprzężonej z elektrodą nadprzewodzącą i dwoma elektrodami normalnymi. Podobnie jak dla złącza Josephsona badane były procesy odpowiadające za przepływ par Coopera w sposób rozdzielony i nierozdzielony przez układ dla singletowego stanu podstawowego kropek kwantowych, stanu nieobsadzonych kropek kwantowych oraz stanów trypletowych. Tak jak to miało miejsce w poprzednim układzie odsunięcie poziomów energetycznych kropek kwantowych od położenia rezonansowego i przejście do zakresu współtunelowania pozwala na uzyskanie skorelowanego przepływu par elektronów przez układ przy jednoczesnym zachowaniu wysokiej sprawności rozdzielania par Coopera. Dla układu z elektrodami normalnymi obliczona sprawność rozdzielania par Coopera w pobliżu rezonansu wynosi 100%, a poza rezonansem wynosi 80% dla kropek kwantowych obsadzonych w stanie podstawowym parą elektronów w spinowym stanie singletowym, oraz 50% dla nieobsadzonych kropek kwantowych. Pokazano istnienie blokady rozdzielania par Coopera dla kropek kwantowych będących w stanie trypletowym. Dzięki przejściu do zakresu współtunelowania ułatwione zostaje wyodrębnianie splątanych par elektronów z nadprzewodnika. W zakresie sekwencyjnego tunelowania sprawność rozdzielania par Coopera jest idealna, jednakże nie mamy kontroli nad przepływem par elektronów. Uzyskane wyniki pozwalają upatrywać w rozdzielaniu par Coopera wydajnego źródła elektronów w stanie splątania kwantowego, które następnie można zastosować jako mobilne kubity.

W drugiej części pracy zaproponowano detekcję stanu kwantowego splątania elektronów za pomocą operatora świadka splątania, oraz omówiono wpływ nieidealnych detektorów, zaszumienia, relaksacji spinowej i dekoherencji na detekcję splątania kwantowego. Porównano detekcję za pomocą świadka splątania z powszechnie stosowaną detekcją przy

użyciu łamania nierówności Bella w postaci nierówności CHSH. Obliczono wymaganą polaryzację spinową detektorów ferromagnetycznych niezbędną do detekcji splątania. Dla źródła splątanych elektronów charakteryzującego się idealną widzialnością wymagane są detektory o polaryzacji spinowej  $1/\sqrt{3}$ ,  $1/\sqrt{2}$  i  $1/\sqrt[4]{2}$  dla detekcji odpowiednio za pomocą operatora świadka splątania, zredukowanego świadka splątania oraz łamania nierówności CHSH. Pokazano, że zaszumienie układu wymusza stosowanie sprawniejszych detektorów ferromagnetycznych, charakteryzujących się wyższą polaryzacją spinową. Przedstawione wyniki wskazują na konieczność poszukiwania nowych materiałów w celu wytwarzania detektorów ferromagnetycznych mających wykryć stan splątania kwantowego. Jednakże pokazano, że zastosowanie jednego detektora ferromagnetycznego o wysokiej polaryzacji spinowej pozwala na zmniejszenie wymagań względem drugiego detektora ferromagnetycznego.

Ponieważ pomiar korelatorów spinowych nie należy do najłatwiejszych zaproponowano detekcję splątania kwantowego za pomocą pomiarów prądu stałego w układzie podwójnej kropki kwantowej sprzężonej z elektrodą nadprzewodzącą i dwoma elektrodami ferromagnetycznymi. Pokazano, że prąd płynący przez układ zależy od konfiguracji magnetyzacji detektorów ferromagnetycznych. Na podstawie tego efektu zaproponowano postać operatora świadka splątania, a następnie przedstawiono wymaganą polaryzację spinową detektorów ferromagnetycznych. Najmniejsza wymagana polaryzacja spinowa niezbędna do detekcji opartej na pomiarach prądu stałego wynosi 65.4% dla przyłożonego napięcia  $eV_F/U_{dot} = -0.5$  w układzie symetrycznym.

Podsumowując, cel rozprawy można uznać za osiągnięty. Pokazano skuteczną metodę otrzymywania splątanych par elektronów w sposób skorelowany oraz przedstawiono możliwość realizacji eksperymentalnej układu do detekcji splątania kwantowego. Kolejnym krokiem prowadzonych badań będzie analiza wpływu asymetrii polaryzacji oraz sił sprzężeń kropek kwantowych z elektrodami nadprzewodzącą i ferromagnetycznymi na detekcję stanu splątania kwantowego, jak również zbadanie możliwości detekcji stanu splątania kwantowego w układzie charakteryzującym się niekolinearnym kierunkiem magnetyzacji elektrod ferromagnetycznych.



## Dodatek A

# Prąd Josephsona w układzie sprzężonych kropek kwantowych

W Rozdziale 3 przedstawione zostały wyrażenia na prąd Josephsona dla układu, w którym zabronione zostało przejście elektronów pomiędzy kropkami kwantowymi ( $t_d \rightarrow 0$ ). Uwzględnienie sprzężenia między kropkami kwantowymi, czyli możliwości tunelowania elektronów pomiędzy kropkami kwantowymi ( $t_d > 0$ ) powoduje, że oddziaływania wymiany nie mogą zostać zaniedbane  $J = \frac{4t_d^2}{U} > 0$ , co prowadzi do następujących wyrażeń na prąd Josephsona w układzie podwójnej kropki kwantowej sprzężonej z dwoma elektrodami nadprzewodzącymi:

$$\begin{aligned}
 I_{|S\rangle} &= \frac{2e}{\hbar} 4 \sin \varphi t_{\mathbf{k}}^2 t_{\mathbf{q}}^2 N_L N_R \int d\epsilon_L \int d\epsilon_R u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} \\
 &\times \left( \left( \frac{1}{\epsilon_{d\downarrow} - E_{\mathbf{k}} - J + t_d} + \frac{1}{\epsilon_{d\uparrow} - E_{\mathbf{k}} - J + t_d} \right) \right. \\
 &\times \left( \frac{1}{\epsilon_{d\uparrow} - E_{\mathbf{q}} - J + t_d} + \frac{1}{\epsilon_{d\downarrow} - E_{\mathbf{q}} - J + t_d} \right) \frac{1}{-\epsilon_{d\downarrow} - \epsilon_{d\uparrow} + J} \\
 &+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\epsilon_{d\uparrow} - E_{\mathbf{k}} - J + t_d} \frac{1}{\epsilon_{d\downarrow} - E_{\mathbf{q}} - J + t_d} + \frac{1}{\epsilon_{d\downarrow} - E_{\mathbf{k}} - J + t_d} \frac{1}{\epsilon_{d\uparrow} - E_{\mathbf{q}} - J + t_d} \right) \\
 &\times \left. \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}}} \right), \tag{8.19}
 \end{aligned}$$

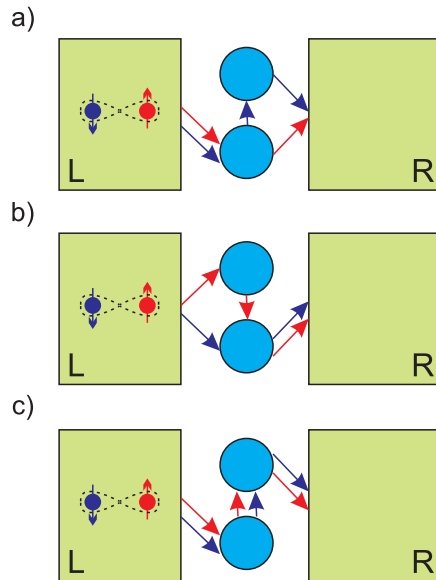
$$\begin{aligned}
 I_{|0\rangle} &= \frac{2e}{\hbar} 4 \sin \varphi t_{\mathbf{k}}^2 t_{\mathbf{q}}^2 N_L N_R \int d\epsilon_L \int d\epsilon_R u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} \\
 &\times \left( - \left( \frac{1}{-\epsilon_{d\downarrow} - E_{\mathbf{k}} + t_d} + \frac{1}{-\epsilon_{d\uparrow} - E_{\mathbf{k}} + t_d} \right) \right. \\
 &\times \left( \frac{1}{-\epsilon_{d\downarrow} - E_{\mathbf{q}} + t_d} + \frac{1}{-\epsilon_{d\uparrow} - E_{\mathbf{q}} + t_d} \right) \frac{1}{-\epsilon_{d\downarrow} - \epsilon_{d\uparrow} + J} \\
 &+ 2 \left( \frac{1}{-\epsilon_{d\downarrow} - E_{\mathbf{k}} + t_d} \frac{1}{-\epsilon_{d\uparrow} - E_{\mathbf{q}} + t_d} + \frac{1}{-\epsilon_{d\uparrow} - E_{\mathbf{k}} + t_d} \frac{1}{-\epsilon_{d\downarrow} - E_{\mathbf{q}} + t_d} \right) \\
 &\times \left. \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}}} \right), \tag{8.20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{|\uparrow\uparrow\rangle} &= \frac{2e}{\hbar} 4 \sin \varphi t_{\mathbf{k}}^2 t_{\mathbf{q}}^2 N_L N_R \int d\epsilon_L \int d\epsilon_R u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} \\
&\times \left( \frac{1}{4} \left( -\frac{3}{\epsilon_{d\uparrow} - E_{\mathbf{q}} - t_d} + \frac{1}{\epsilon_{d\uparrow} - E_{\mathbf{q}} + t_d} \right) \frac{1}{\epsilon_{d\uparrow} - E_{\mathbf{k}} - t_d} \right. \\
&- \left. \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\epsilon_{d\uparrow} - E_{\mathbf{q}} - t_d} + \frac{1}{\epsilon_{d\uparrow} - E_{\mathbf{q}} + t_d} \right) \frac{1}{\epsilon_{d\uparrow} - E_{\mathbf{k}} + t_d} \right) \\
&\times \frac{1}{-\epsilon_{d\uparrow} + \epsilon_{d\downarrow} + E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}}}, \tag{8.21}
\end{aligned}$$

gdzie  $I_{|S\rangle}$ ,  $I_{|0\rangle}$ ,  $I_{|\uparrow\uparrow\rangle}$  oznaczają prąd Josephsona odpowiednio dla stanu podstawowego kropek kwantowych: singletowego  $|S\rangle_{DQD}$ , pustego  $|0\rangle_{DQD}$  i trypletowego  $|\uparrow\uparrow\rangle_{DQD}$ . W równaniach uwzględniono również asymetrię pomiędzy poziomami kropek kwantowych  $\epsilon_{d\uparrow} \neq \epsilon_{d\downarrow}$ .

Oprócz procesów rozdzielonych i nierozdzielonych omówionych w Rozdziale 3, wkład do prądu Josephsona dają w tym przypadku również procesy, w których:

1. Elektrony pary Coopera tunelują w sposób nierozdzielony na podwójną kropkę kwantową i opuszczają ją w sposób rozdzielony (Rysunek 8.5(a)).
2. Elektrony pary Coopera tunelują w sposób rozdzielony na podwójną kropkę kwantową i opuszczają ją w sposób nierozdzielony (Rysunek 8.5(b)).
3. Elektrony pary Coopera tunelują w sposób nierozdzielony na pierwszą kropkę kwantową i opuszczają podwójną kropkę kwantową poprzez drugą kropkę w sposób nierozdzielony (odpowiada to szeregowemu połączeniu kropek kwantowych) (Rysunek 8.5(c)).



Rysunek 8.5. Dodatkowe rodzaje procesów dających wkład do prądu Josephsona, dla  $t_d > 0$ . a) Elektrony tunelują w sposób nierozdzielony na podwójną kropkę kwantową i opuszczają ją w sposób rozdzielony. b) Elektrony pary Coopera tunelują w sposób rozdzielony na podwójną kropkę kwantową i opuszczają ją w sposób nierozdzielony. c) Tunelowanie elektronów odpowiadające szeregowemu połączeniu kropek kwantowych.

## Dodatek B

### Świadek splątania i stany separowalne

Zgodnie z definicją świadka splątania wartość oczekiwana  $\langle \mathcal{W} \rangle = \text{Tr}(\mathcal{W}\rho_{AB}^{sep})$  jest nieujemna dla wszystkich stanów separowalnych  $\rho_{AB}^{sep}$ . W celu udowodnienia, że zaproponowane operatory są rzeczywiście świadkami splątania, korzystamy z definicji stanu separowalnego (7.5):

$$\rho_{AB}^{sep} = \sum_i q_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|_A \otimes |\phi_i\rangle \langle \phi_i|_B, \quad (8.22)$$

oraz na podstawie liniowości śladu macierzy, wystarczające jest sprawdzenie, czy dla wszystkich stanów iloczynowych  $|\psi_i\rangle \langle \psi_i|_A \otimes |\phi_i\rangle \langle \phi_i|_B$  spełnione jest:

$$\text{Tr}(\mathcal{W} |\psi_i\rangle \langle \psi_i|_A \otimes |\phi_i\rangle \langle \phi_i|_B) \geq 0. \quad (8.23)$$

Podstawiając:

$$|\psi\rangle = \sin \alpha |\uparrow\rangle + e^{i\theta} \cos \alpha |\downarrow\rangle, \quad (8.24)$$

$$|\phi\rangle = \sin \beta |\uparrow\rangle + e^{i\varphi} \cos \beta |\downarrow\rangle, \quad (8.25)$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[ \frac{1}{2} (I + \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z) |\psi\rangle \langle \psi|_A \otimes |\phi\rangle \langle \phi|_B \right] \\ &= \frac{1}{2} (1 + \langle \psi | \hat{\sigma}_x | \psi \rangle \langle \phi | \hat{\sigma}_x | \phi \rangle + \langle \psi | \hat{\sigma}_y | \psi \rangle \langle \phi | \hat{\sigma}_y | \phi \rangle + \langle \psi | \hat{\sigma}_z | \psi \rangle \langle \phi | \hat{\sigma}_z | \phi \rangle) \\ &= \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \cos(\theta - \varphi) \sin 2\alpha \sin 2\beta \geq 0, \end{aligned} \quad (8.26)$$

co dowodzi wyrażenia (8.23). Podobnie postępujemy dla zredukowanych operatorów świadka splątania:

$$\text{Tr}(\mathcal{V}_{xy} |\psi\rangle \langle \psi|_A \otimes |\phi\rangle \langle \phi|_B) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\theta - \varphi) \sin 2\alpha \sin 2\beta] \geq 0, \quad (8.27)$$

$$\text{Tr}(\mathcal{V}_{xz} |\psi\rangle \langle \psi|_A \otimes |\phi\rangle \langle \phi|_B) = \frac{1}{2} [1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta + \cos \theta \cos \varphi \sin 2\alpha \sin 2\beta] \geq 0, \quad (8.28)$$

$$\text{Tr}(\mathcal{V}_{yz} |\psi\rangle \langle \psi|_A \otimes |\phi\rangle \langle \phi|_B) = \frac{1}{2} [1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta + \sin \theta \sin \varphi \sin 2\alpha \sin 2\beta] \geq 0, \quad (8.29)$$

co wraz z pokazanym w Rozdziale 7 przyjmowaniem wartości ujemnej dla  $\text{Tr}(\mathcal{V}_{ij} \rho_{AB}^W)$ , stanowi dowód, że  $\mathcal{V}_{xy}$ ,  $\mathcal{V}_{xz}$ ,  $\mathcal{V}_{yz}$  są świadkami splątania.



# Spis publikacji autora

## Prace opublikowane:

1. *Correlation analysis of atomic and single-molecule junction conductance*  
Péter Makk, Damian Tomaszewski, Jan Martinek, Zoltán Balogh, Szabolcs Csonka, Maciej Wawrzyniak, Michael Frei, Latha Venkataraman, and András Halbritter  
ACS NANO 6, 3411-3423 (2012).
2. *Entanglement witnessing and quantum cryptography with non-ideal ferromagnetic detectors*  
Waldemar Kłobus, Andrzej Grudka, Andreas Baumgartner, Damian Tomaszewski, Christian Schönenberger, and Jan Martinek  
Physical Review B 89, 125404 (2014).
3. *Entanglement detection with use of current measurements in double quantum dot system*  
Piotr Busz, Piotr Rożek, Damian Tomaszewski, and Jan Martinek  
Acta Physica Polonica A 127, 490-492 (2015).
4. *Entanglement detection with non-ideal ferromagnetic detectors*  
Piotr Rożek, Piotr Busz, Waldemar Kłobus, Damian Tomaszewski, Andrzej Grudka, Andreas Baumgartner, Christian Schönenberger, and Jan Martinek  
Acta Physica Polonica A 127, 493-495 (2015).

## Prace w przygotowaniu:

1. *Time correlation and cross-correlation of conductance in atomic quantum point contacts*  
Damian Tomaszewski, Szymon Maćkowiak, András Halbritter, Péter Makk, Szabolcs Csonka, Maciej Wawrzyniak, and Jan Martinek

2. *Superconducting proximity effect and Cooper pair splitting in double quantum dot in cotunneling regime*

Damian Tomaszewski, Rok Žitko, Rosa López, Minchul Lee, and Jan Martinek

3. *Combined Aharonov-Bohm and Aharonov-Casher effect on Josephson current*

Damian Tomaszewski, Rok Žitko, Rosa López, Minchul Lee, and Jan Martinek

# Uczestnictwo w konferencjach i szkołach międzynarodowych

## 1. Physics of Magnetism 2011 (PM'11)

27.06 - 1.07.2011, Poznań, Polska

Plakat:

- *Time correlation and cross-correlation of conductance in atomic quantum point contacts*

D. Tomaszewski, Sz. Mackowiak, A. Halbritter, P. Makk, Sz. Csonka, M. Wawrzyński, and J. Martinek

## 2. Spin-orbit interactions and entanglement generation in solid state devices (SE2ND workshop)

1.05 – 2.05.2012, Kopenhaga, Dania

Współautorstwo prezentacji ustnej:

- *Cooper pair splitting efficiency in DQD*

J. Martinek, D. Tomaszewski, R. Zitko, R. Lopez, M. Lee, A. Grudka

## 3. International School of Physics „Enrico Fermi” - „Quantum Spintronics and Related Phenomena”

18.06 – 29.06.2012, Varenna, Włochy

Plakaty:

- *Time correlation and cross-correlation of conductance in atomic quantum point contacts*

D. Tomaszewski, Sz. Mackowiak, A. Halbritter, P. Makk, Sz. Csonka, M. Wawrzyński, and J. Martinek

- *Cooper pair splitting efficiency in double quantum dot in cotunneling regime*

D. Tomaszewski, R. Zitko, R. Lopez, M. Lee, and J. Martinek

## 4. Source of Entangled Electrons in Nano Devices - first year review

20.09 – 21.09.2012, Paryż, Francja

Współautorstwo prezentacji ustnej:

- *Cooper pair splitting efficiency in DQD*

J. Martinek, D. Tomaszewski, R. Zitko, R. Lopez, M. Lee, A. Grudka

## 5. Frontiers in Quantum Engineered Devices

19.08 – 24.08.2013, Obergurgl, Austria

Plakat:

- *Cooper pair splitting efficiency in double quantum dot in cotunneling regime*

D. Tomaszewski, R. Zitko, R. Lopez, M. Lee, and J. Martinek

## 6. XLII Zjazd Fizyków Polskich

8.09 – 13.09.2013, Poznań, Polska

Współautorstwo prezentacji ustnej:

- *Cooper pair splitting as a source of the entangled electrons*

J. Martinek, D. Tomaszewski, M. Czechlewski, P. Rożek, R. Zitko, R. Lopez,

M. Lee, W. Kłobus, A. Grudka, A. Baumgartner, C. Schönenberger

Plakaty:

- *Cooper pair splitting efficiency in double quantum dot in cotunneling regime*

D. Tomaszewski, R. Zitko, R. Lopez, M. Lee, and J. Martinek

- *Wykrywanie splątania elektronów w układzie kropek kwantowych sprzężonych do nadprzewodzących i ferromagnetycznych elektrod*

P. Rożek, M. Czechlewski, D. Tomaszewski, and J. Martinek

## 7. Nanoelectronics: Concepts, Theory and Modelling

23.09 – 27.09.2013, Wąsowo, Polska

Współautorstwo prezentacji ustnej:

- *Cooper pair splitting as a source of the entangled electrons*

J. Martinek, D. Tomaszewski, M. Czechlewski, P. Rożek, R. Zitko, R. Lopez,

M. Lee, W. Kłobus, A. Grudka, A. Baumgartner, C. Schönenberger

Plakaty:

- *Cooper pair splitting efficiency in double quantum dot in cotunneling regime*

D. Tomaszewski, R. Zitko, R. Lopez, M. Lee, and J. Martinek

- *Quantum spin torque in quantum dot coupled to ferromagnetic leads*

D. Tomaszewski, A.-D. Crisan, S. Datta, J. J. Viennot, M. R. Delbecq, C. Feuillet-Palma, A. Thiaville, A. Cottet, T. Kontos, and J. Martinek

- 
- *Correlation analysis of atomic and single-molecule junction conductance*  
D. Tomaszewski, P. Makk, A. Halbritter, Z. Balogh, S. Csonka, M. Wawrzyniak, M. Frei, L. Venkataraman, and J. Martinek
  - *Entanglement detection of split cooper pairs by direct current measurements using double quantum dots and ferromagnetic detectors*  
P. Rożek, M. Czechlewski, D. Tomaszewski, and J. Martinek
  - *Current-voltage characteristics of metal-semiconductor quantum nanocontacts*  
M. Wawrzyniak, D. Tomaszewski, and J. Martinek
8. The Third Poznań Symposium on "Quantum Engineering, Information, and Nonlinear Optics" (QEINO 2013)  
15.10-17.10.2013, Poznań, Polska  
Współautorstwo prezentacji ustnej:
- *Cooper pair splitting as a source of the entangled electrons*  
J. Martinek, D. Tomaszewski, M. Czechlewski, P. Rożek, R. Zitko, R. Lopez, M. Lee, W. Kłobus, A. Grudka, A. Baumgartner, C. Schönenberger
- Plakaty:
- *Cooper pair splitting efficiency in double quantum dot in cotunneling regime*  
D. Tomaszewski, R. Zitko, R. Lopez, M. Lee, and J. Martinek
  - *Quantum spin torque in quantum dot coupled to ferromagnetic leads*  
D. Tomaszewski, A.-D. Crisan, S. Datta, J. J. Viennot, M. R. Delbecq, C. Feuillet-Palma, A. Thiaville, A. Cottet, T. Kontos, and J. Martinek
  - *Correlation analysis of atomic and single-molecule junction conductance*  
D. Tomaszewski, P. Makk, A. Halbritter, Z. Balogh, S. Csonka, M. Wawrzyniak, M. Frei, L. Venkataraman, and J. Martinek
  - *Entanglement detection of split cooper pairs by direct current measurements using double quantum dots and ferromagnetic detectors*  
P. Rożek, M. Czechlewski, D. Tomaszewski, and J. Martinek
9. Source of Entangled Electrons in Nano Devices - progress meeting  
10.04 – 13.04.2014, Madryt, Hiszpania  
Współautorstwo prezentacji ustnej:
- *Cooper pair splitting as a source of the entangled electrons*  
J. Martinek, D. Tomaszewski, M. Czechlewski, P. Rożek, R. Zitko, R. Lopez, M. Lee, W. Kłobus, A. Grudka, A. Baumgartner, C. Schönenberger

## 10. Physics of Magnetism 2014 (PM'14)

23.06 – 27.06.2014, Poznań, Polska

Współautorstwo prezentacji ustnej:

- *Cooper pair splitting as a source of the entangled electrons*  
J. Martinek, D. Tomaszewski, P. Busz, P. Rożek, W. Kłobus, A. Grudka, A. Baumgartner, C. Schönenberger

Plakaty:

- *Cooper pair splitting efficiency in double quantum dot in cotunneling regime*  
D. Tomaszewski, R. Zitko, R. Lopez, M. Lee, and J. Martinek
- *Quantum spin torque in quantum dot coupled to ferromagnetic leads*  
D. Tomaszewski, A.-D. Crisan, S. Datta, J. J. Viennot, M. R. Delbecq, C. Feuillet-Palma, A. Thiaville, A. Cottet, T. Kontos, and J. Martinek
- *Entanglement detection with use of current measurements in double quantum dot system*  
P. Busz, P. Rożek, D. Tomaszewski, and J. Martinek
- *Entanglement detection with non-ideal ferromagnetic detectors*  
P. Rożek, P. Busz, W. Kłobus, D. Tomaszewski, A. Grudka, A. Baumgartner, C. Schönenberger and J. Martinek
- *Influence of the Schottky barrier on conductance of metal - semiconductor nanocontacts*  
M. Wawrzyniak, D. Tomaszewski, P. Busz, and J. Martinek

## 11. Source of Entangled Electrons in Nano Devices - progress meeting

30.10-31.10.2014, Kartause Ittingen, Szwajcaria

Współautorstwo prezentacji ustnej:

- *Entanglement state manipulation by spin-orbit interaction and noncollinear ferromagnetic detectors*  
J. Martinek, D. Tomaszewski, P. Busz, P. Rożek, W. Kłobus, A. Grudka, A. Baumgartner, C. Schönenberger

# Bibliografia

- [1] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, “Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*: A new violation of Bell’s inequalities,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 49, pp. 91–94, 1982.
- [2] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?,” *Phys. Rev.*, vol. 47, pp. 777–780, 1935.
- [3] Y. H. Shih and C. O. Alley, “New type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiment using pairs of light quanta produced by optical parametric down conversion,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, pp. 2921–2924, 1988.
- [4] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko, and Y. Shih, “New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, pp. 4337–4341, 1995.
- [5] D. Loss and D. P. DiVincenzo, “Quantum computation with quantum dots,” *Phys. Rev. A*, vol. 57, pp. 120–126, 1998.
- [6] J. M. Elzerman, R. Hanson, L. H. W. van Beveren, B. Witkamp, L. M. K. Vandersypen, and L. P. Kouwenhoven, “Single-shot read-out of an individual electron spin in a quantum dot,” *Nature*, vol. 430, no. 6998, pp. 431–435, 2004.
- [7] F. H. L. Koppens, C. Buizert, K. J. Tielrooij, I. T. Vink, K. C. Nowack, T. Meunier, L. P. Kouwenhoven, and L. M. K. Vandersypen, “Driven coherent oscillations of a single electron spin in a quantum dot,” *Nature*, vol. 442, no. 7104, pp. 766–771, 2006.
- [8] L. Hofstetter, S. Csonka, J. Nygård, and C. Schönenberger, “Cooper pair splitter realized in a two-quantum-dot Y-junction,” *Nature*, vol. 461, no. 7266, pp. 960–963, 2009.
- [9] L. G. Herrmann, F. Portier, P. Roche, A. L. Yeyati, T. Kontos, and C. Strunk, “Carbon nanotubes as Cooper-pair beam splitters,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 104, p. 026801, 2010.
- [10] J. Schindele, A. Baumgartner, and C. Schönenberger, “Near-unity Cooper pair splitting efficiency,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, p. 157002, 2012.
- [11] A. Das, Y. Ronen, M. Heiblum, D. Mahalu, A. V. Kretinin, and H. Shtrikman,

- “High-efficiency Cooper pair splitting demonstrated by two-particle conductance resonance and positive noise cross-correlation,” *Nat. Comms.*, vol. 3, p. 1165, 2012.
- [12] M. Bellac, *Wstęp do informatyki kwantowej*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2011.
- [13] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information (Cambridge Series on Information and the Natural Sciences)*. Cambridge University Press, 2000.
- [14] J. S. Bell, “On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox,” *Physics*, vol. 1, pp. 195–200, 1964.
- [15] D. P. DiVincenzo, “Topics in quantum computers,” in *Mesoscopic Electron Transport* (L. L. Sohn, L. P. Kouwenhoven, and G. Schön, eds.), vol. 345, pp. 657–677, Springer Netherlands, 1997.
- [16] D. P. Divincenzo, “The physical implementation of quantum computation,” *Fortschr. Phys*, vol. 48, p. 2000, 2000.
- [17] Y. Nazarov and Y. M. Blanter, *Quantum transport introduction to nanoscience*. Cambridge New York: Cambridge University Press, 2009.
- [18] V. Bouchiat, D. Vion, P. Joyez, D. Esteve, and M. H. Devoret, “Quantum coherence with a single Cooper pair,” *Physica Scripta*, vol. T76, no. 1, p. 165, 1998.
- [19] J. M. Martinis, S. Nam, J. Aumentado, and C. Urbina, “Rabi oscillations in a large Josephson-junction qubit,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. 117901, 2002.
- [20] V. T. Petrashov, K. G. Chua, K. M. Marshall, R. S. Shaikhaidarov, and J. T. Nicholls, “Andreev probe of persistent current states in superconducting quantum circuits,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 147001, 2005.
- [21] H. Paik, D. I. Schuster, L. S. Bishop, G. Kirchmair, G. Catelani, A. P. Sears, B. R. Johnson, M. J. Reagor, L. Frunzio, L. I. Glazman, S. M. Girvin, M. H. Devoret, and R. J. Schoelkopf, “Observation of high coherence in Josephson junction qubits measured in a three-dimensional circuit QED architecture,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 107, p. 240501, 2011.
- [22] F. Troiani, U. Hohenester, and E. Molinari, “Exploiting exciton-exciton interactions in semiconductor quantum dots for quantum-information processing,” *Phys. Rev. B*, vol. 62, pp. R2263–R2266, 2000.
- [23] A. Zrenner, E. Beham, S. Stuffer, F. Findeis, M. Bichler, and G. Abstreiter, “Coherent properties of a two-level system based on a quantum-dot photodiode,” *Nature*, vol. 418, no. 6898, pp. 612–614, 2002.
- [24] M. Bayer, “Coupling and entangling of quantum states in quantum dot molecules,” *Science*, vol. 291, no. 5503, pp. 451–453, 2001.
- [25] X. Li, “An all-optical quantum gate in a semiconductor quantum dot,” *Science*, vol. 301, no. 5634, pp. 809–811, 2003.



- 
- [26] T. Hayashi, T. Fujisawa, H. D. Cheong, Y. H. Jeong, and Y. Hirayama, “Coherent manipulation of electronic states in a double quantum dot,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 226804, 2003.
- [27] J. Gorman, D. G. Hasko, and D. A. Williams, “Charge-qubit operation of an isolated double quantum dot,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 090502, 2005.
- [28] K. D. Petersson, J. R. Petta, H. Lu, and A. C. Gossard, “Quantum coherence in a one-electron semiconductor charge qubit,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 246804, 2010.
- [29] K. C. Nowack, F. H. L. Koppens, Y. V. Nazarov, and L. M. K. Vandersypen, “Coherent control of a single electron spin with electric fields,” *Science*, vol. 318, no. 5855, pp. 1430–1433, 2007.
- [30] M. Pioro-Ladrière, T. Obata, Y. Tokura, Y.-S. Shin, T. Kubo, K. Yoshida, T. Taniyama, and S. Tarucha, “Electrically driven single-electron spin resonance in a slanting Zeeman field,” *Nat Phys*, vol. 4, no. 10, pp. 776–779, 2008.
- [31] R. Vrijen, E. Yablonovitch, K. Wang, H. W. Jiang, A. Balandin, V. Roychowdhury, T. Mor, and D. DiVincenzo, “Electron-spin-resonance transistors for quantum computing in silicon-germanium heterostructures,” *Phys. Rev. A*, vol. 62, p. 012306, 2000.
- [32] L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood, and I. L. Chuang, “Experimental realization of Shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance,” *Nature*, vol. 414, no. 6866, pp. 883–887, 2001.
- [33] E. Martín-López, A. Laing, T. Lawson, R. Alvarez, X.-Q. Zhou, and J. L. O’Brien, “Experimental realization of Shor’s quantum factoring algorithm using qubit recycling,” *Nature Photonics*, vol. 6, no. 11, pp. 773–776, 2012.
- [34] J. Kelly, R. Barends, A. G. Fowler, A. Megrant, E. Jeffrey, T. C. White, D. Sank, J. Y. Mutus, B. Campbell, Y. Chen, Z. Chen, B. Chiaro, A. Dunsworth, I.-C. Hoi, C. Neill, P. J. J. O’Malley, C. Quintana, P. Roushan, A. Vainsencher, J. Wenner, A. N. Cleland, and J. M. Martinis, “State preservation by repetitive error detection in a superconducting quantum circuit,” *Nature*, vol. 519, no. 7541, pp. 66–69, 2015.
- [35] C. H. Bennett and G. Brassard, “Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing,” in *Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing*, pp. 175–179, 1984.
- [36] W. K. Wootters and W. H. Zurek, “A single quantum cannot be cloned,” *Nature*, vol. 299, no. 5886, pp. 802–803, 1982.
- [37] D. Dieks, “Communication by EPR devices,” *Physics Letters A*, vol. 92, no. 6, pp. 271–272, 1982.
- [38] A. R. Dixon, Z. L. Yuan, J. F. Dynes, A. W. Sharpe, and A. J. Shields, “Gigahertz decoy

- quantum key distribution with 1 Mbit/s secure key rate,” *Opt. Express*, vol. 16, no. 23, p. 18790, 2008.
- [39] P. A. Hiskett, D. Rosenberg, C. G. Peterson, R. J. Hughes, S. Nam, A. E. Lita, A. J. Miller, and J. E. Nordholt, “Long-distance quantum key distribution in optical fibre,” *New J. Phys.*, vol. 8, no. 9, pp. 193–193, 2006.
- [40] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, pp. 1895–1899, 1993.
- [41] X.-S. Ma, T. Herbst, T. Scheidl, D. Wang, S. Kropatschek, W. Naylor, B. Wittmann, A. Mech, J. Kofler, E. Anisimova, V. Makarov, T. Jennewein, R. Ursin, and A. Zeilinger, “Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward,” *Nature*, vol. 489, no. 7415, pp. 269–273, 2012.
- [42] J. Yin, Y. Cao, H.-L. Yong, J.-G. Ren, H. Liang, S.-K. Liao, F. Zhou, C. Liu, Y.-P. Wu, G.-S. Pan, L. Li, N.-L. Liu, Q. Zhang, C.-Z. Peng, and J.-W. Pan, “Lower bound on the speed of nonlocal correlations without locality and measurement choice loopholes,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, p. 260407, 2013.
- [43] H. K. Onnes, “The resistance of pure mercury at helium temperatures,” *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden*, vol. 12, pp. 120+, 1911.
- [44] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, “Theory of superconductivity,” *Phys. Rev.*, vol. 108, pp. 1175–1204, 1957.
- [45] A. Szewczyk, A. Wisniewski, R. Puźniak, and H. Szymczak, *Magnetyzm i nadprzewodnictwo*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2012.
- [46] M. Tinkham, *Introduction to superconductivity*. New York: McGraw Hill, 1996.
- [47] J. Bardeen, “Superconductivity and other macroscopic quantum phenomena,” *Physics Today*, vol. 43, no. 12, p. 25, 1990.
- [48] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, “On the theory of superconductivity,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 20, pp. 1064–1082, 1950.
- [49] L. P. Gor’kov, “Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the theory of superconductivity,” *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 36, no. 9, pp. 1364–1367, 1959.
- [50] M. Cyrot and D. Pavuna, *Wstęp do nadprzewodnictwa: nadprzewodniki wysokotemperaturowe*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1996.
- [51] L. Kouwenhoven, C. Marcus, P. McEuen, S. Tarucha, R. Westervelt, and N. Wingreen, “Electron transport in quantum dots,” in *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Mesoscopic Electron Transport*, vol. E345, pp. 105–214, Kluwer Series, 1997.

- 
- [52] W. Lu, Z. Ji, L. Pfeiffer, K. W. West, and A. J. Rimberg, "Real-time detection of electron tunnelling in a quantum dot," *Nature*, vol. 423, no. 6938, pp. 422–425, 2003.
- [53] T. Fujisawa, D. G. Austing, Y. Tokura, Y. Hirayama, and S. Tarucha, "Allowed and forbidden transitions in artificial hydrogen and helium atoms," *Nature*, vol. 419, no. 6904, pp. 278–281, 2002.
- [54] N. Roch, S. Florens, V. Bouchiat, W. Wernsdorfer, and F. Balestro, "Quantum phase transition in a single-molecule quantum dot," *Nature*, vol. 453, no. 7195, pp. 633–637, 2008.
- [55] D. M. Bruls, J. W. A. M. Vugs, P. M. Koenraad, H. W. M. Salemink, J. H. Wolter, M. Hopkinson, M. S. Skolnick, F. Long, and S. P. A. Gill, "Determination of the shape and indium distribution of low-growth-rate InAs quantum dots by cross-sectional scanning tunneling microscopy," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 81, no. 9, p. 1708, 2002.
- [56] P. Recher, E. V. Sukhorukov, and D. Loss, "Andreev tunneling, Coulomb blockade, and resonant transport of nonlocal spin-entangled electrons," *Phys. Rev. B*, vol. 63, p. 165314, 2001.
- [57] J. Eldridge, M. G. Pala, M. Governale, and J. König, "Superconducting proximity effect in interacting double-dot systems," *Phys. Rev. B*, vol. 82, p. 184507, 2010.
- [58] B. I. Spivak and S. A. Kivelson, "Negative local superfluid densities: The difference between dirty superconductors and dirty Bose liquids," *Phys. Rev. B*, vol. 43, pp. 3740–3743, 1991.
- [59] M.-S. Choi, M. Lee, K. Kang, and W. Belzig, "Kondo effect and Josephson current through a quantum dot between two superconductors," *Phys. Rev. B*, vol. 70, p. 020502, 2004.
- [60] B. R. Bułka and P. Stefański, "Fano and kondo resonance in electronic current through nanodevices," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 86, pp. 5128–5131, 2001.
- [61] J. A. van Dam, Y. V. Nazarov, E. P. A. M. Bakkers, S. D. Franceschi, and L. P. Kouwenhoven, "Supercurrent reversal in quantum dots," *Nature*, vol. 442, no. 7103, pp. 667–670, 2006.
- [62] S. D. Franceschi, L. Kouwenhoven, C. Schönenberger, and W. Wernsdorfer, "Hybrid superconductor–quantum dot devices," *Nature Nanotechnology*, vol. 5, no. 10, pp. 703–711, 2010.
- [63] R. Shankar, *Mechanika kwantowa*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 2007.
- [64] J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*. Pearson Education (US), 2007.
- [65] D. Tomaszewski, R. Žitko, R. López, M. Lee, and J. Martinek, "Superconducting proximity effect and Cooper pair splitting in double quantum dot in cotunneling regime." Nieopublikowane.

- [66] Y. Aharonov and D. Bohm, “Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory,” *Phys. Rev.*, vol. 115, pp. 485–491, 1959.
- [67] Y. Aharonov and A. Casher, “Topological quantum effects for neutral particles,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 53, pp. 319–321, 1984.
- [68] A. Cimmino, G. I. Opat, A. G. Klein, H. Kaiser, S. A. Werner, M. Arif, and R. Clothier, “Observation of the topological Aharonov-Casher phase shift by neutron interferometry,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 63, pp. 380–383, 1989.
- [69] H. Mathur and A. D. Stone, “Quantum transport and the electronic Aharonov-Casher effect,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 68, pp. 2964–2967, 1992.
- [70] G. Dresselhaus, “Spin-orbit coupling effects in zinc blende structures,” *Phys. Rev.*, vol. 100, pp. 580–586, 1955.
- [71] J. Wang and K. S. Chan, “Josephson current oscillation in a Rashba ring,” *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 21, no. 24, p. 245701, 2009.
- [72] Z. Wang and X. Hu, “Interference and switching of Josephson current carried by nonlocal spin-entangled electrons in a SQUID-like system with quantum dots,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 106, p. 037002, 2011.
- [73] X. Liu, M. F. Borunda, X.-J. Liu, and J. Sinova, “Control of Josephson current by Aharonov-Casher phase in a Rashba ring,” *Phys. Rev. B*, vol. 80, p. 174524, 2009.
- [74] L. Dell’Anna, A. Zazunov, R. Egger, and T. Martin, “Josephson current through a quantum dot with spin-orbit coupling,” *Phys. Rev. B*, vol. 75, p. 085305, 2007.
- [75] E. I. Rashba, “Properties of semiconductors with an extremum loop .1. cyclotron and combinational resonance in a magnetic field perpendicular to the plane of the loop,” *Sov. Phys. Solid. State*, vol. 2, no. 1109, pp. 1224–1238, 1960.
- [76] Y. A. Bychkov and E. I. Rashba, “Oscillatory effects and the magnetic susceptibility of carriers in inversion layers,” *J. Phys. C: Solid State Phys.*, vol. 17, no. 33, pp. 6039–6045, 1984.
- [77] S. Datta and B. Das, “Electronic analog of the electro-optic modulator,” *Applied Physics Letters*, vol. 56, no. 7, p. 665, 1990.
- [78] P. Makk, D. Tomaszewski, J. Martinek, Z. Balogh, S. Csonka, M. Wawrzyniak, M. Frei, L. Venkataraman, and A. Halbritter, “Correlation analysis of atomic and single-molecule junction conductance,” *ACS Nano*, vol. 6, no. 4, pp. 3411–3423, 2012.
- [79] D. Tomaszewski, S. Maćkowiak, A. Halbritter, P. Makk, S. Csonka, M. Wawrzyniak, and J. Martinek, “Time correlation and cross-correlation of conductance in atomic quantum point contacts.” Nieopublikowane.
- [80] R. López, D. Sánchez, and L. Serra, “From Coulomb blockade to the Kondo regime in a Rashba dot,” *Phys. Rev. B*, vol. 76, p. 035307, 2007.

- 
- [81] M. Crisan, D. Sánchez, R. López, L. Serra, and I. Grosu, “Localized magnetic states in Rashba dots,” *Phys. Rev. B*, vol. 79, p. 125319, 2009.
- [82] D. Tomaszewski, R. Žitko, R. López, M. Lee, and J. Martinek, “Combined Aharonov-Bohm and Aharonov-Casher effect on Josephson current.” Nieopublikowane.
- [83] D. Frustaglia and K. Richter, “Spin interference effects in ring conductors subject to Rashba coupling,” *Phys. Rev. B*, vol. 69, p. 235310, 2004.
- [84] F. E. Meijer, A. F. Morpurgo, and T. M. Klapwijk, “One-dimensional ring in the presence of Rashba spin-orbit interaction: Derivation of the correct Hamiltonian,” *Phys. Rev. B*, vol. 66, p. 033107, 2002.
- [85] D. C. Mattis, *The theory of magnetism made simple: An introduction to physical concepts and to some useful mathematical methods*. World Scientific Publishing Company, 2006.
- [86] F. Mireles and G. Kirczenow, “Ballistic spin-polarized transport and Rashba spin precession in semiconductor nanowires,” *Phys. Rev. B*, vol. 64, p. 024426, 2001.
- [87] J. Barański and T. Domański, “Fano-type interference in quantum dots coupled between metallic and superconducting leads,” *Phys. Rev. B*, vol. 84, p. 195424, 2011.
- [88] T. Domański, A. Donabidowicz, and K. I. Wysokiński, “Influence of pair coherence on charge tunneling through a quantum dot connected to a superconducting lead,” *Phys. Rev. B*, vol. 76, p. 104514, 2007.
- [89] A. Bednorz, J. Tworzydło, J. Wróbel, and T. Dietl, “Maximal positive cross-correlation of current noise from Andreev reflection,” *Phys. Rev. B*, vol. 79, p. 245408, 2009.
- [90] G. Michałek, B. R. Bułka, T. Domański, and K. I. Wysokiński, “Interplay between direct and crossed andreev reflections in hybrid nanostructures,” *Phys. Rev. B*, vol. 88, p. 155425, 2013.
- [91] F. W. J. Hekking, L. I. Glazman, K. A. Matveev, and R. I. Shekhter, “Coulomb blockade of two-electron tunneling,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, pp. 4138–4141, 1993.
- [92] J. W. Wilkins, “Multiparticle tunneling,” in *Tunneling Phenomena in Solids: Lectures presented at the 1967/NATO Advanced Study Institute at Risø, Denmark* (E. Burstein and S. Lundqvist, eds.), ch. 24, pp. 333–352, Springer, 2012.
- [93] T. Dittrich, P. Hänggi, G.-L. Ingold, B. Kramer, G. Schön, and W. Zwerger, *Quantum transport and dissipation*. Wiley-VCH, 1998.
- [94] A. Einstein, “On the electrodynamics of moving bodies,” *Annalen der Physik*, vol. 17, 1905.
- [95] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, “Proposed experiment to test local hidden-variable theories,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 23, pp. 880–884, 1969.
- [96] A. Aspect, “Bell’s theorem: The naive view of an experimentalist,” in *Quantum [Un]speakables*, pp. 119–153, Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [97] A. M. Souza, A. Magalhães, J. Teles, E. R. deAzevedo, T. J. Bonagamba, I. S. Oliveira, and

- R. S. Sarthour, "NMR analog of Bell's inequalities violation test," *New J. Phys.*, vol. 10, no. 3, p. 033020, 2008.
- [98] A. Peres, "Separability criterion for density matrices," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, pp. 1413–1415, 1996.
- [99] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, "Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions," *Physics Letters A*, vol. 223, no. 1-2, pp. 1–8, 1996.
- [100] O. Gühne and G. Tóth, "Entanglement detection," *Physics Reports*, vol. 474, no. 1-6, pp. 1–75, 2009.
- [101] M. Lewenstein, B. Kraus, J. I. Cirac, and P. Horodecki, "Optimization of entanglement witnesses," *Phys. Rev. A*, vol. 62, p. 052310, 2000.
- [102] N. Mott, "Electrons in transition metals," *Advances in Physics*, vol. 13, no. 51, pp. 325–422, 1964.
- [103] R. F. Werner, "Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model," *Phys. Rev. A*, vol. 40, pp. 4277–4281, 1989.
- [104] W. K. Wootters, "Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, pp. 2245–2248, 1998.
- [105] R. Coehoorn, "Electronic structure calculations for rare earth-transition metal compounds," in *Supermagnets, hard magnetic materials*, ch. 8, pp. 133–170, S.l: Springer, 2013.
- [106] W. M. de Muynck and H. Martens, "Neutron interferometry and the joint measurement of incompatible observables," *Phys. Rev. A*, vol. 42, pp. 5079–5085, 1990.
- [107] W. Kłobus, A. Grudka, A. Baumgartner, D. Tomaszewski, C. Schönenberger, and J. Martinek, "Entanglement witnessing and quantum cryptography with nonideal ferromagnetic detectors," *Phys. Rev. B*, vol. 89, p. 125404, 2014.
- [108] K. Kim, H. Min, S. Oh, and D. Ahn, "Decoherence effects on the entangled states in a noisy quantum channel," *Journal of the Korean Physical Society*, vol. 45, pp. 273–280, 2004.
- [109] P. Hyllus, O. Gühne, D. Bruß, and M. Lewenstein, "Relations between entanglement witnesses and Bell inequalities," *Phys. Rev. A*, vol. 72, p. 012321, 2005.
- [110] M. Curty, M. Lewenstein, and N. Lütkenhaus, "Entanglement as a precondition for secure quantum key distribution," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, p. 217903, 2004.
- [111] M. Curty, O. Gühne, M. Lewenstein, and N. Lütkenhaus, "Detecting two-party quantum correlations in quantum-key-distribution protocols," *Phys. Rev. A*, vol. 71, p. 022306, 2005.
- [112] R. Horodecki, P. Horodecki, and M. Horodecki, "Violating Bell inequality by mixed states: necessary and sufficient condition," *Physics Letters A*, vol. 200, no. 5, pp. 340–344, 1995.
- [113] S. Kawabata, "Test of Bell's inequality using the spin filter effect in ferromagnetic semiconductor microstructures," *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 70, no. 5, pp. 1210–1213, 2001.

- 
- [114] G. Burkard, D. Loss, and E. V. Sukhorukov, “Noise of entangled electrons: Bunching and antibunching,” *Phys. Rev. B*, vol. 61, pp. R16303–R16306, 2000.
- [115] L. Faoro and F. Taddei, “Entanglement detection for electrons via witness operators,” *Phys. Rev. B*, vol. 75, p. 165327, 2007.
- [116] P. Rożek, P. Busz, W. Kłobus, D. Tomaszewski, A. Grudka, A. Baumgartner, C. Schönenberger, and J. Martinek, “Entanglement detection with non-ideal ferromagnetic detectors,” *Acta Phys. Pol. A*, vol. 127, no. 2, pp. 493–495, 2015.
- [117] R. J. Soulen Jr., “Measuring the spin polarization of a metal with a superconducting point contact,” *Science*, vol. 282, no. 5386, pp. 85–88, 1998.
- [118] J. S. Parker, S. M. Watts, P. G. Ivanov, and P. Xiong, “Spin polarization of  $\text{cro}_2$  at and across an artificial barrier,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 196601, 2002.
- [119] B. Varaprasad, A. Srinivasan, Y. Takahashi, M. Hayashi, A. Rajanikanth, and K. Hono, “Spin polarization and Gilbert damping of  $\text{Co}_2\text{Fe}(\text{GaxGe}_{1-x})$  Heusler alloys,” *Acta Materialia*, vol. 60, no. 18, pp. 6257–6265, 2012.
- [120] L. E. Hueso, J. M. Pruneda, V. Ferrari, G. Burnell, J. P. Valdés-Herrera, B. D. Simons, P. B. Littlewood, E. Artacho, A. Fert, and N. D. Mathur, “Transformation of spin information into large electrical signals using carbon nanotubes,” *Nature*, vol. 445, no. 7126, pp. 410–413, 2007.
- [121] P. Busz, P. Rożek, D. Tomaszewski, and J. Martinek, “Entanglement detection by current measurements in double quantum dot system,” *Acta Phys. Pol. A*, vol. 127, no. 2, pp. 490–492, 2015.
- [122] K. H. Ploog, “Single charge tunneling, Coulomb blockade phenomena in nanostructures,” in *Advanced Materials* (H. Grabert and M. H. Devoret, eds.), vol. 5, pp. 227–227, Wiley-Blackwell, 1993.
- [123] S. Maekawa, *Concepts in spin electronics*. Oxford: Oxford University Press, 2006.
- [124] S. Maekawa and T. Shinjo, eds., *Spin Dependent Transport in Magnetic Nanostructures (Advances in Condensed Matter Science)*. CRC Press, 2002.