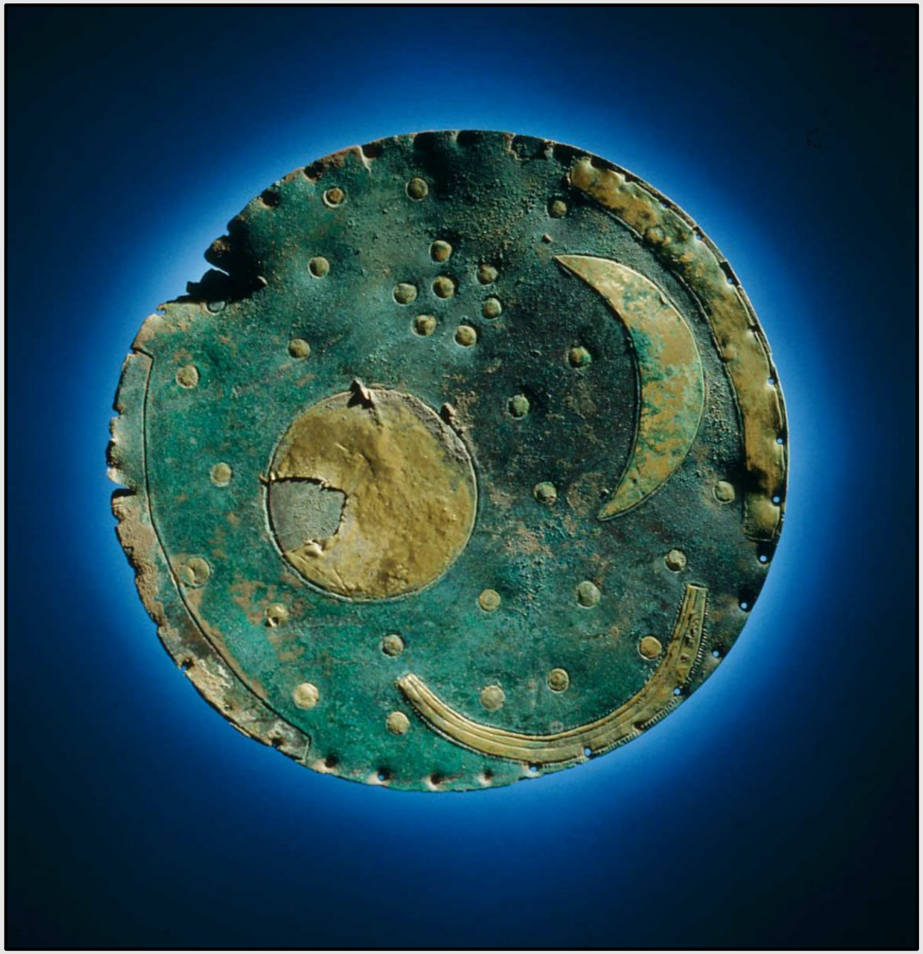
Orbity typu Mołnija

praktyczne zastosowanie mechaniki nieba



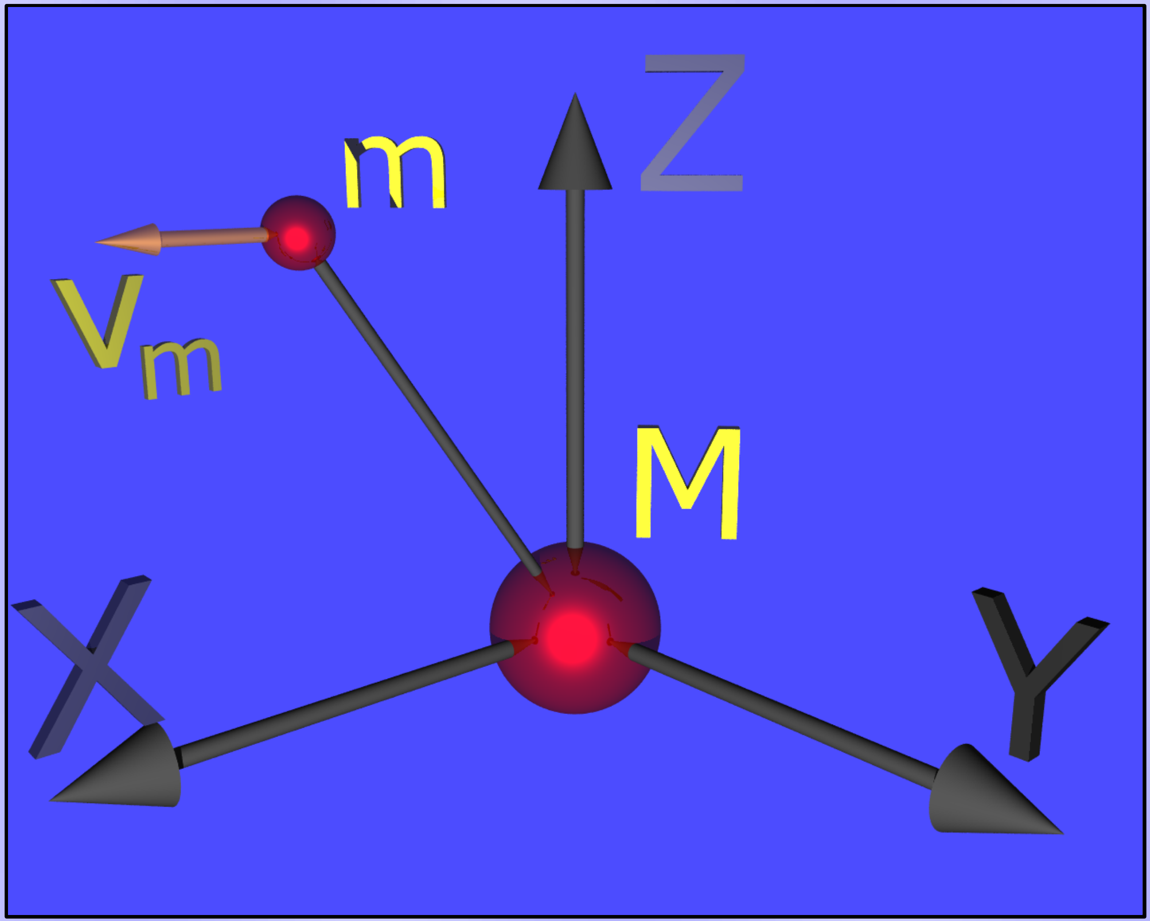
Dysk z Nebry, ok. 1600 pne

Maciej Urbaniak
IFM PAN Poznań

Orbity typu Mołnija
praktyczne zastosowanie mechaniki nieba

- Orbity keplerowskie
  - Zaburzone orbity keplerowski
    - Orbity typu Mołnija

Orbity Keplerowskie-ruch w polu siły centralnej typu r^{-2}



Z zasady zachowania momentu pędu

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}_m = const$$

$$\vec{h} \cdot \vec{r} = \underbrace{(\vec{r} \times \vec{v}_m)}_{\text{prostopadłe do } \vec{r}} \cdot \vec{r}$$

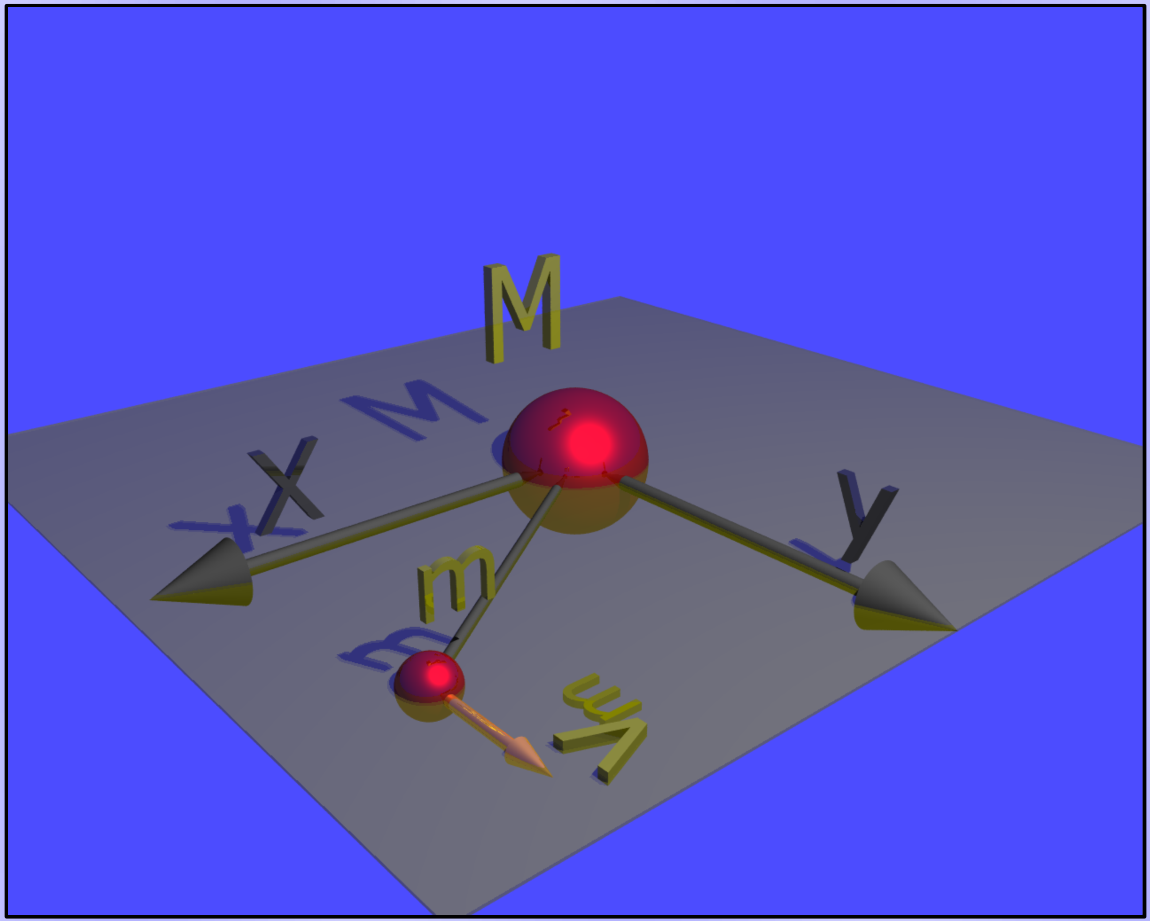
$\vec{h} \cdot \vec{r} = 0$ **równanie płaszczyzny prostopadłej do $\vec{h}$**

M - nieruchoma masa

$$F = -G \frac{M\,m}{r^3} \vec{r}$$

Ruch w polu siły centralnej jest dwuwymiarowy – ruch odbywa się w płaszczyźnie

Orbity Keplerowskie-ruch w polu siły centralnej typu r^{-2}



Z zasady zachowania momentu pędu

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}_m = const$$

$$\vec{h} \cdot \vec{r} = \underbrace{(\vec{r} \times \vec{v}_m)}_{\text{prostopadłe do } \vec{r}} \cdot \vec{r}$$

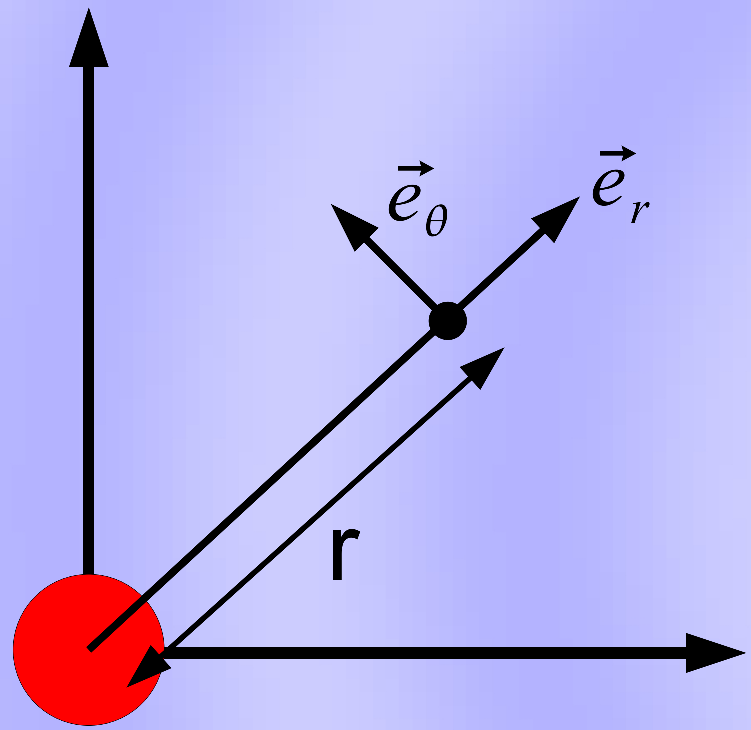
$$\vec{h} \cdot \vec{r} = 0$$ **równanie płaszczyzny prostopadłej do $\vec{h}$**

M - nieruchoma masa

$$F = -G \frac{M\, m}{r^3} \vec{r}$$

Ruch w polu siły centralnej jest dwuwymiarowy – ruch odbywa się w płaszczyźnie

Orbity Keplerowskie-ruch w polu siły centralnej typu r^{-2}

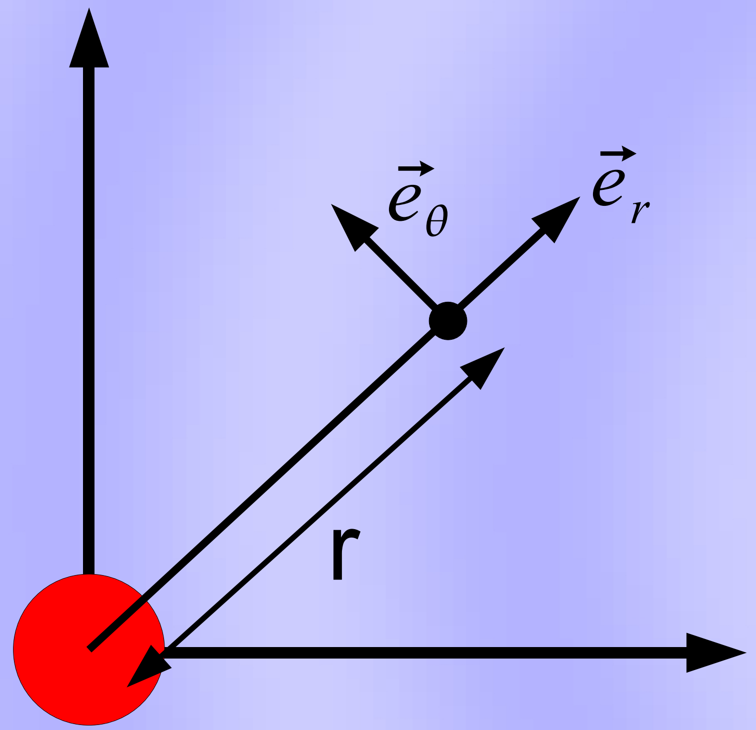


Biegunowy układ współrzędnych

$$\vec{e}_r = \hat{x}\cos(\theta) + \hat{y}\sin(\theta)$$
$$\vec{e}_\theta = -\hat{x}\sin(\theta) + \hat{y}\cos(\theta)$$

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r$$
$$\frac{d\,\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\vec{e}}_r$$
$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{d}{dt}(\hat{x}\cos(\theta) + \hat{y}\sin(\theta))$$
$$= -\hat{x}\sin(\theta)\dot{\theta} + \hat{y}\cos(\theta)\dot{\theta}$$
$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$
$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$
$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{e}}_r + (\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\dot{\vec{e}}_\theta$$
$$\dot{\vec{e}}_\theta = \frac{d}{dt}(-\hat{x}\sin(\theta) + \hat{y}\cos(\theta))$$
$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r$$

Orbity Keplerowskie-ruch w polu siły centralnej typu r^{-2}



Biegunowy układ współrzędnych

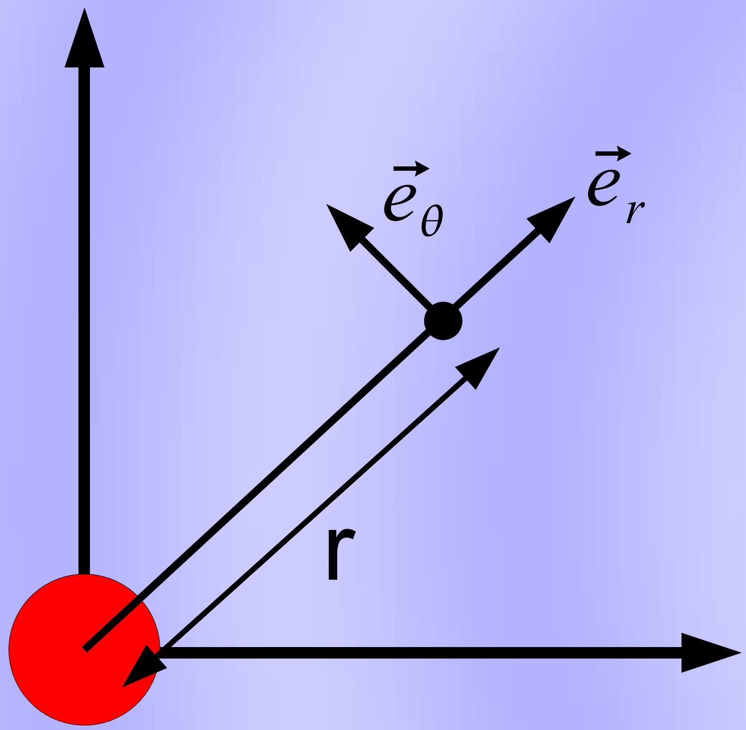
$$\vec{e}_r = \hat{x}\cos(\theta) + \hat{y}\sin(\theta)$$
$$\vec{e}_\theta = -\hat{x}\sin(\theta) + \hat{y}\cos(\theta)$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{e}}_r + (\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\vec{e}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\dot{\vec{e}}_\theta$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r$$

Orbity Keplerowskie-ruch w polu siły centralnej typu r^{-2}



$$\vec{a} = \vec{e}_r(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \vec{e}_\theta(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

$$\frac{\vec{F}}{m} = \frac{-\mathbf{G}M}{r^3}\vec{r} \qquad \textit{grawitacja}$$

$$\frac{-GM}{r^3}\vec{r} = \frac{-GM}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}$$

$$\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r = 0$$

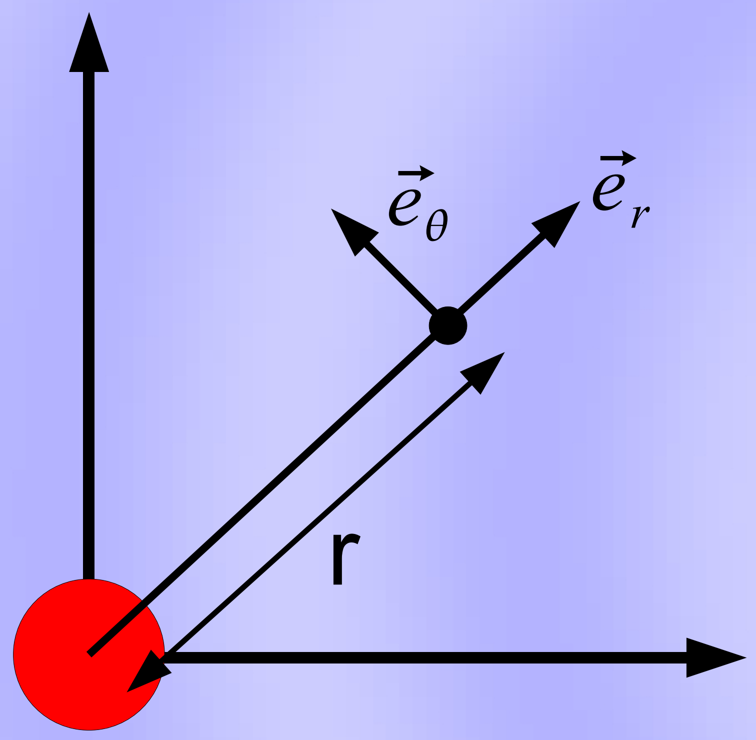
Biegunowy układ współrzędnych

$$\vec{e}_r = \hat{x}\cos(\theta) + \hat{y}\sin(\theta)$$
$$\vec{e}_\theta = -\hat{x}\sin(\theta) + \hat{y}\cos(\theta)$$

Równanie ruchu w układzie biegunowym

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \dfrac{-GM}{r^2} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Orbity Keplerowskie-ruch w polu siły centralnej typu r^{-2}



Biegunowy układ współrzędnych

$$\vec{e}_r = \hat{x}\cos(\theta) + \hat{y}\sin(\theta)$$
$$\vec{e}_\theta = -\hat{x}\sin(\theta) + \hat{y}\cos(\theta)$$

Równanie ruchu w układzie biegunowym

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \dfrac{-GM}{r^2} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \qquad (1) \end{cases}$$

$$r(\theta) = \frac{r^2\dot{\theta}}{GM}\frac{1}{1-e\cos(\theta)}$$

$$\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = (1)\,r = 0$$

$$r(\theta) = \frac{h}{GM}\frac{1}{1-e\cos(\theta)}$$

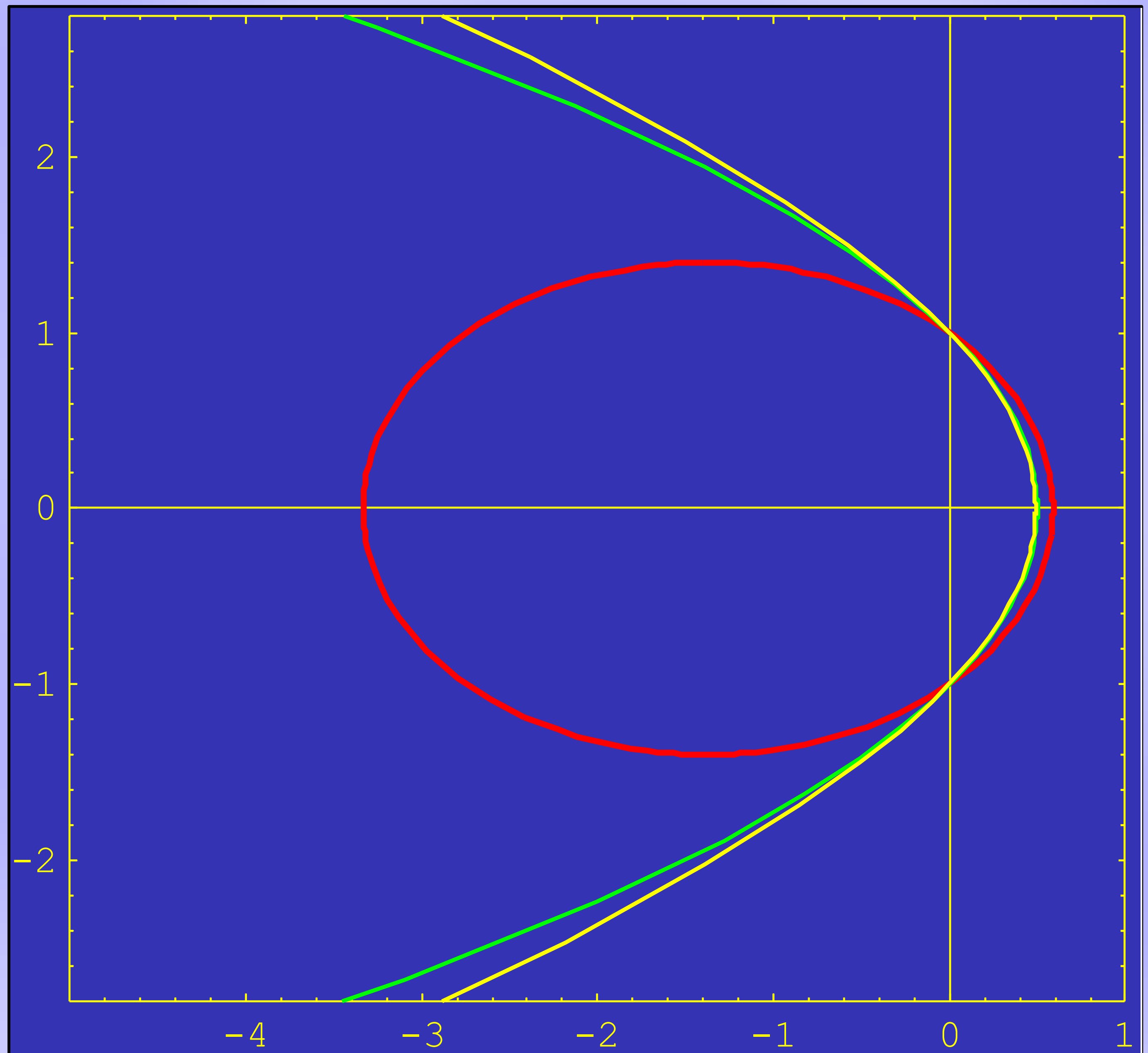
Orbity Keplerowskie-ruch w polu siły centralnej typu r^{-2}

$$r(\theta)=\frac{h}{GM}\frac{1}{1-e\cos(\theta)}$$

krzywe stożkowe:
e - mimośród

e<1 elipsa
e=1 parabola
e>1 hiperbola

Satelity poruszają się po elipsach



Orbity Keplerowskie-ruch w polu siły centralnej typu r^{-2}

Zagadnienie dwu ciał – nie dotyczy sztucznych satelitów Ziemi

$$\frac{masa\ Ziemi}{masa\ satelity} \approx \frac{5{,}976\times 10^{24}\,kg}{10^{3}\,kg}$$

Zagadnienie dwu ciał

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = f \qquad (1)$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -f \qquad (2)$$

$$(1)\frac{1}{m_1} - (2)\frac{1}{m_2}:$$

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{f}{m_1} + \frac{f}{m_2} = f\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

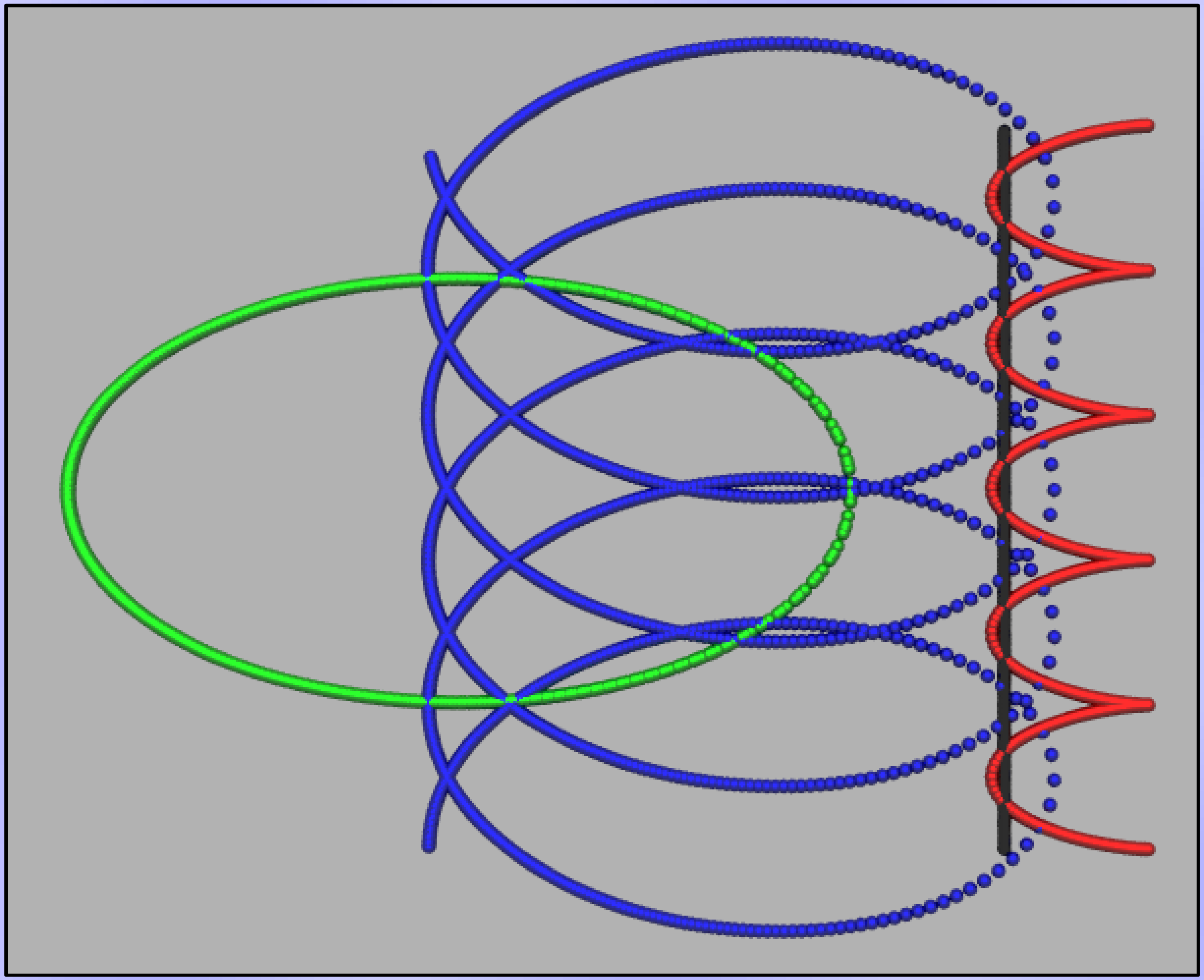
$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Równanie analogiczne do równania ruchu w polu siły centralnej

$$\left\{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right\} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -f$$

Ruch względny odbywa się po elipsie

Orbity Keplerowskie-ruch w polu siły centralnej typu r^{-2}



masa 1

masa 2

środek masy

ruch względny

Orientacja elipsy nie zmienia się z czasem

Przykład ruchu dwóch ciał oddziałujących siłą typu r^{-2} (stosunek mas 4:1) względem układu inercjalnego

punkt co 10000 Δt

Stabilność orbit kołowych w polu siły centralnej typu r^n

Równanie ruchu w układzie biegunowym:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \dfrac{-GM}{r^2} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = f(r)$$

Na orbicie kołowej:

$$\ddot{r} = 0 \qquad\qquad h := r^2\dot{\theta}$$

$$\frac{-h^2}{r_c^3} = f(r_c)$$

r_c - promień orbity kołowej

x – wprowadzamy odstępstwa od kształtu koła

$$\ddot{x} - \frac{h^2}{(r_c + x)^3} = f(r_c + x) \xrightarrow[\text{w szereg Taylora}]{\text{rozwinięcie}} \ddot{x} - \frac{h^2}{r_c^3} + \frac{3h^2 x}{r_c^4} - \frac{6h^2 x^2}{r_c^5} = f(r_c) + f'(r_c)x + \frac{1}{2}f''(r_c)x^2$$

=0

$$\ddot{x} + \left[\frac{3h^2}{r_c^4} - f'(r_c)\right]x = 0$$

$$\ddot{x} + \left[\frac{-3f(r_c)}{r_c} - f'(r_c)\right]x = 0$$

Stabilność orbit kołowych w polu siły centralnej typu r^n

$$\ddot{x}+\left[\frac{-3f(r_c)}{r_c}-f'(r_c)\right]x=0$$

$$\ddot{x}+k^2x=0$$

$k>0$ *oscylator harmoniczny*

$k<0$ *rozwiazanie nieograniczone*

K<0 – orbita niestabilna względem małych oscylacji

Warunek stabilności orbit kołowych:

$$\frac{3f(r_c)}{r_c}+f'(r_c)<0$$

$$f(r)=-cr^n \qquad c>0$$

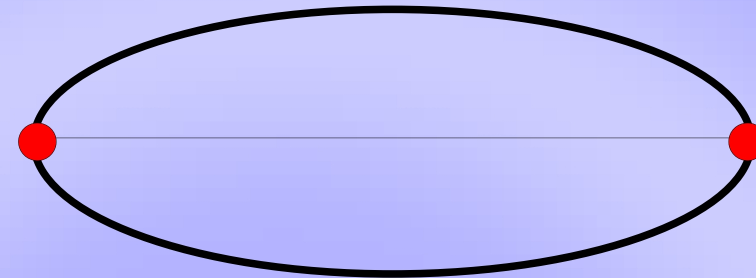
$$-cr_c^n-\frac{1}{3}cnr_c^n<0 \qquad \boldsymbol{n>-3}$$

Orbity kołowe są stabilne w polu siły centralnej typu r^n dla n>-3

Stabilność orbit kołowych w polu siły centralnej typu r^n

Apsyda – jeden z dwóch skrajnych punktów orbity eliptycznej

Kąt apsydalny, ψ (apsydialny) - kąt opisywany przez wektor r przy przejściu między dwoma sąsiednimi apsydami



$$\ddot{x}+\left[\frac{-3f(r_c)}{r_c}-f'(r_c)\right]x=0 \quad \rightarrow \quad T=\frac{2\pi}{\left\{\frac{-3f(r_c)}{r_c}-f'(r_c)\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\psi=\frac{1}{2}T\dot{\theta}$$

$$\psi=\pi\left\{3+r_C\frac{f'(r_c)}{f\,r_c}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}=0 \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}\approx\frac{h}{r_c^2} \quad \leftarrow (r\approx r_c)$$

$$\ddot{r}=0 \quad \rightarrow \quad -\frac{h^2}{r_c^3}=f(r_c) \qquad \dot{\theta}\approx\left\{\frac{-f(r_c)}{r_c}\right\}^{\frac{-1}{2}}$$

Stabilność orbit kołowych w polu siły centralnej typu r^n

$$\psi=\pi\left\{3+r_C\frac{f'(r_c)}{f(r_c)}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(r)=-c\,r^n \qquad c>0$$

$$\psi=\frac{\pi}{\{3+n\}^{0.5}}$$

$$n=-2 \quad (orbity\ keplerowskie):$$

$$\psi=\pi$$

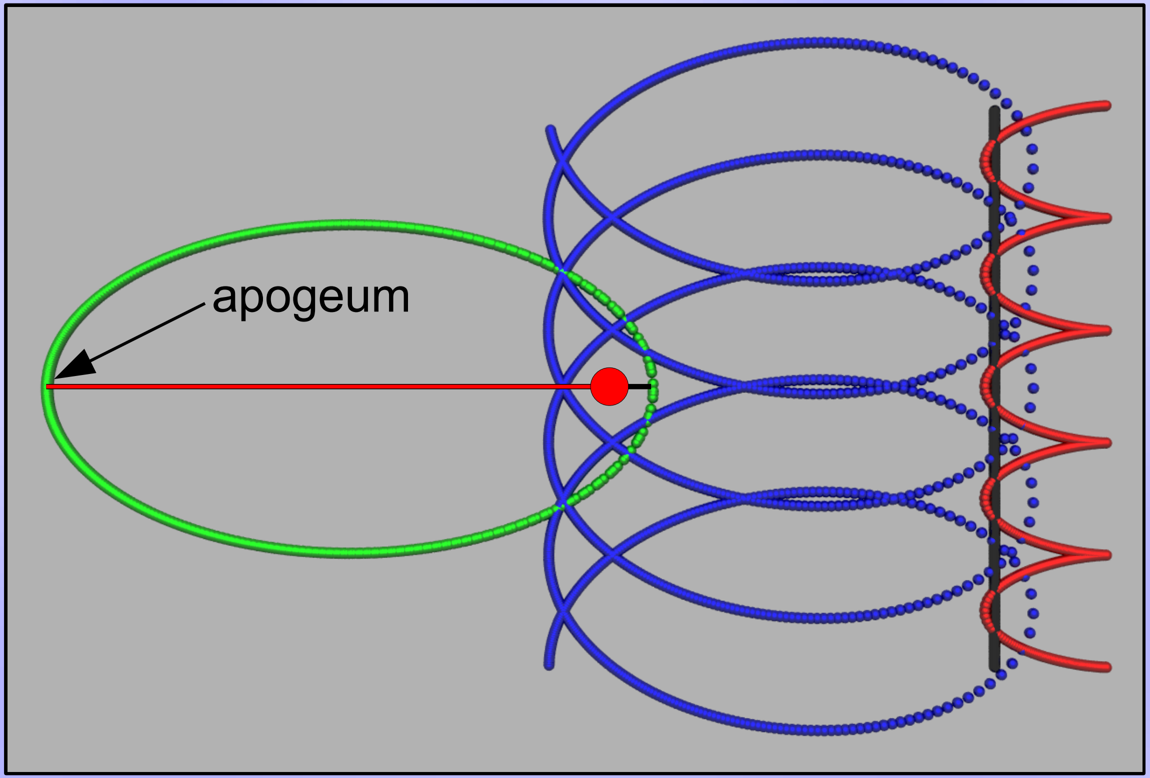
$$n=-4:$$

$$\psi=\frac{\pi}{i}$$

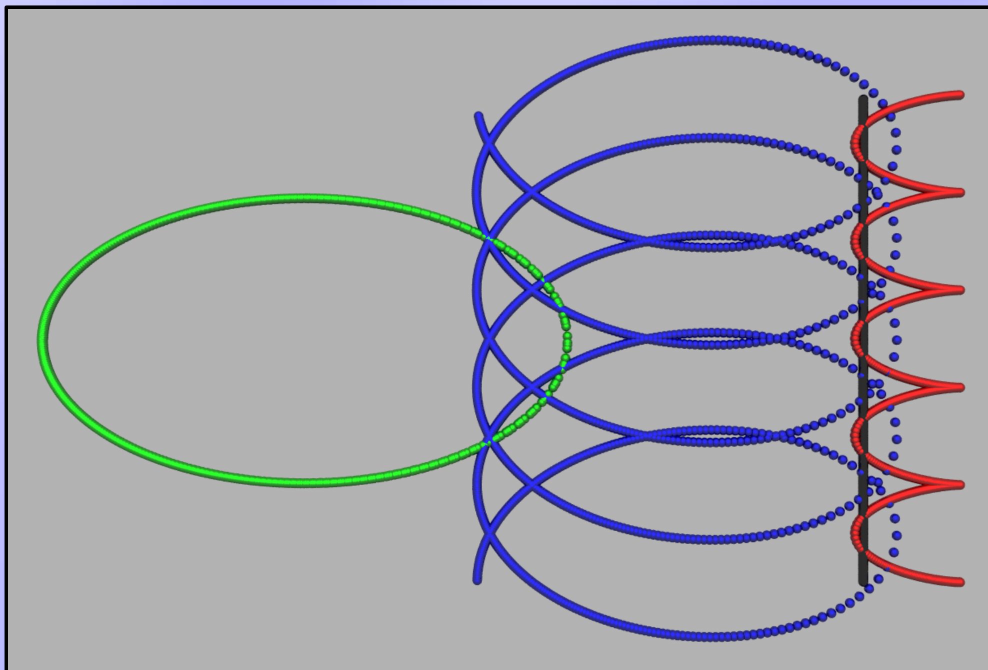
By orbita była zamknięta

$$\frac{\psi}{2\pi}=\frac{1}{2\{3+n\}^{0.5}}$$

musi być liczbą wymierną ($n_1\psi=n_2 2\pi$)



Stabilność orbit kołowych w polu siły centralnej typu r^n

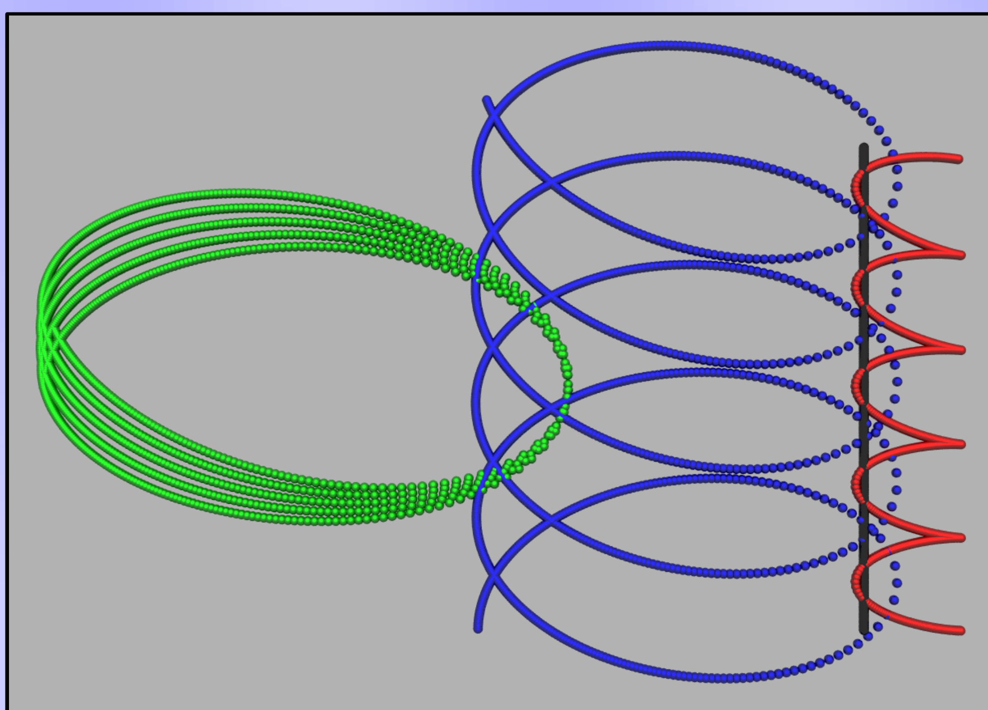


Punkt co 10000 Δt

$$F_G = \frac{G M m}{r^2}$$

$$\psi = \pi$$

orbita zamknięta



Punkt co 1000 Δt

$$F_G = \frac{G M m}{r^2} + \frac{0.5 G M m}{r^4}$$

orbita otwarta

Sztuczne satelity Ziemi

Stosowanie satelitów telekomunikacyjnych postulowane było już w roku 1945:
,,Let us now suppose that such a station were built in this orbit. It could be provided with receiving and transmitting equipment (the problem of power will be discussed later) and could act as a repeater to relay. transmissions between any two points on the hemisphere beneath, using any frequency which will penetrate the ionosphere. If directive arrays were used, the power requirements would be very small, as direct line of sight transmission would be used. There is the further important point that arrays on the earth, once set up, could remain fixed indefinitely." (**A. C. Clarke**, Wireless World, 1945.10)

Propozycja *orbit geostacjonarnych*:
It will be observed that one orbit, with a radius of 42,000 km, has a period of exactly 24 hours. A body in such an orbit, if its plane coincided with that of the earth's equator, would revolve with the earth and would thus be stationary above the same spot on the planet. It would remain fixed in the sky of a whole hemisphere and unlike all other heavenly bodies would neither rise nor set. (**A. C. Clarke**, Wireless World, 1945.10)

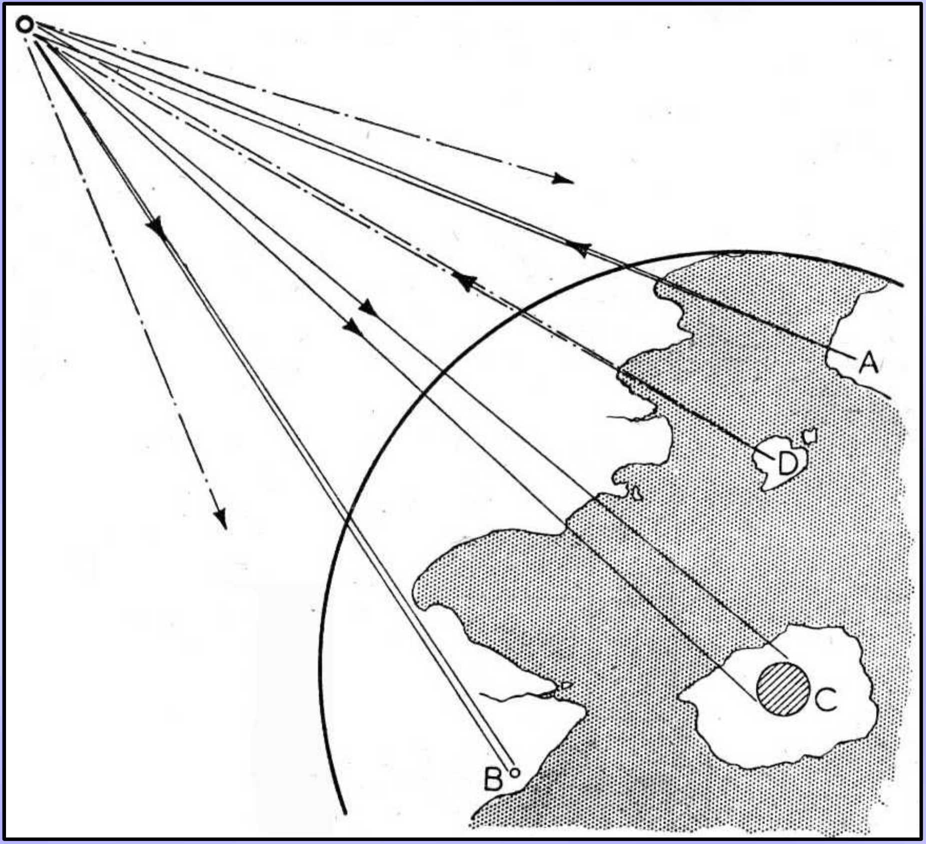
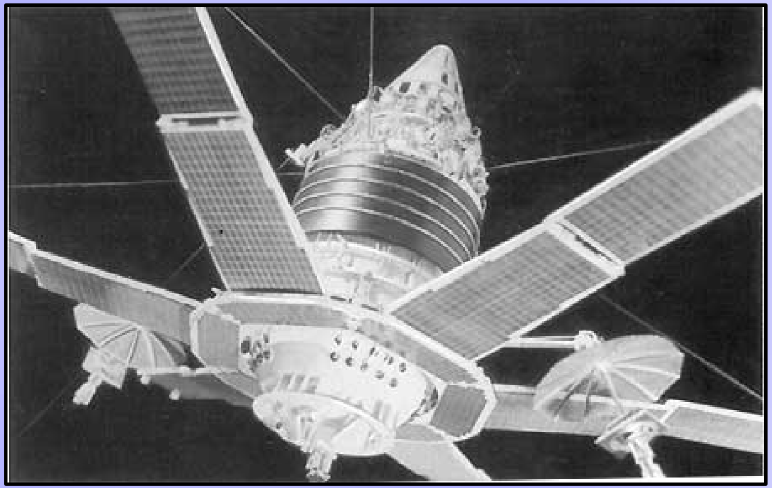


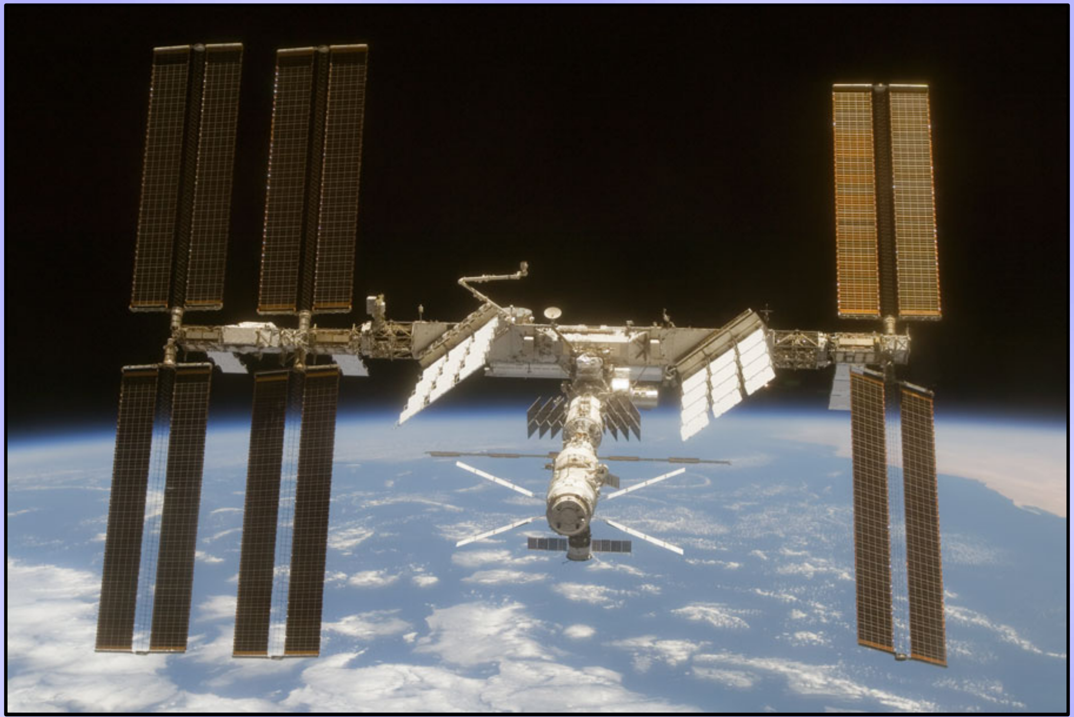
Fig. 2. Typical extra-terrestrial relay services. Transmission from A being relayed to point B and area C; transmission from D being relayed to whole hemisphere. (Wireless..)

Sztuczne satelity Ziemi – krótka historia

- 1948 – wykorzystanie Księżyca jako obiektu odbijającego fale radarowe; odbiór sygnały (United States Army Signal Corps).
- 1954 – transmisja głosu tą samą drogą (U.S. Navy).
- 1957.10.04 - Pierwszy sztuczny satelita Ziemi – **Спутник 1** (Sputnik 1). Nachylenie orbity – ok. **65^{o}**; masa 84kg (**Спутник 3** – 1330 kg)
- 1965.04.23 "**Молния-1**" № 3 (Mołnija- ros. piorun) – pierwszy operacyjny satelita typu Mołnija (transmisja sygnału telewizyjnego)

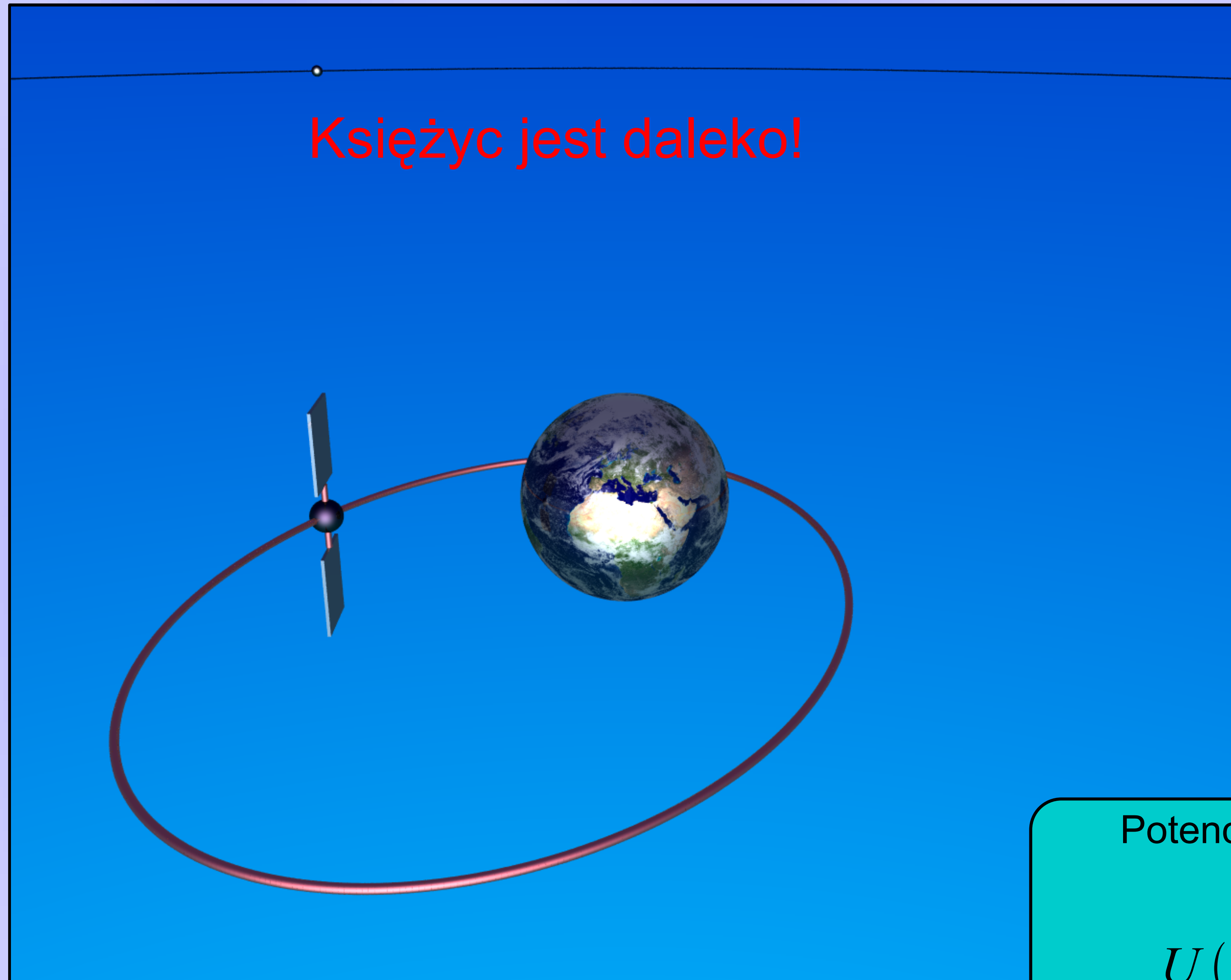


Międzynarodowa Stacja Kosmiczna (1999.12.10)



Źródło: STS-124 Shuttle Crew, NASA

Potencjał grawitacyjny Ziemi



Odległość
Ziemia – Księżyc:
356-407 $\times$ 10^3 km

Wysokość satelitów nad powierzchnią Ziemi:

LEO – 1000 km

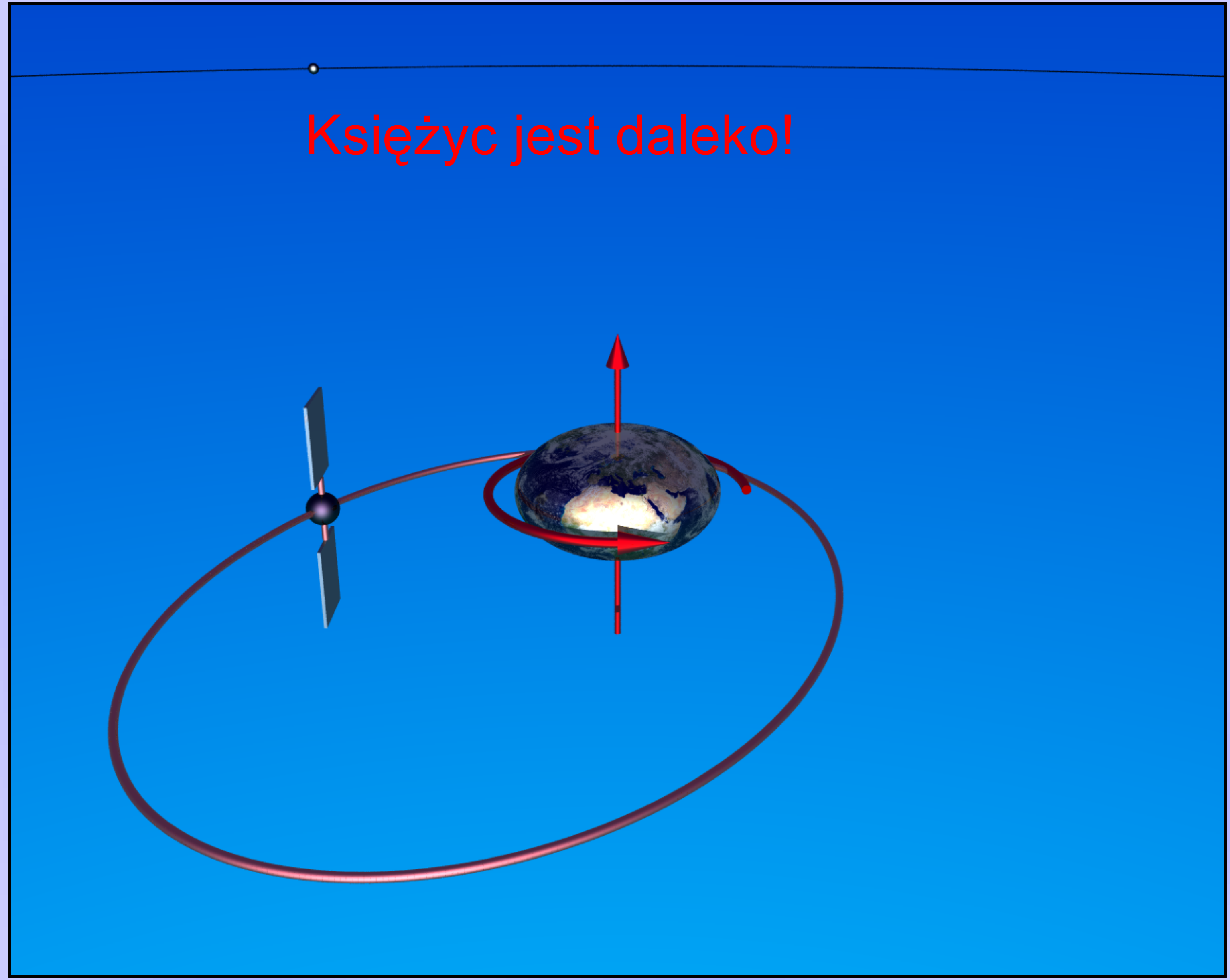
MEO – 20000 km

GEO – 36000 km

Potencjał jednorodnej kuli:

$$U(R) = \frac{G\,M\,m}{R}$$

Potencjał grawitacyjny Ziemi



Obrót Ziemi dookoła własnej osi prowadzi do jej **spłaszczenia**.

Promień równikowy:
r_R=6378 km

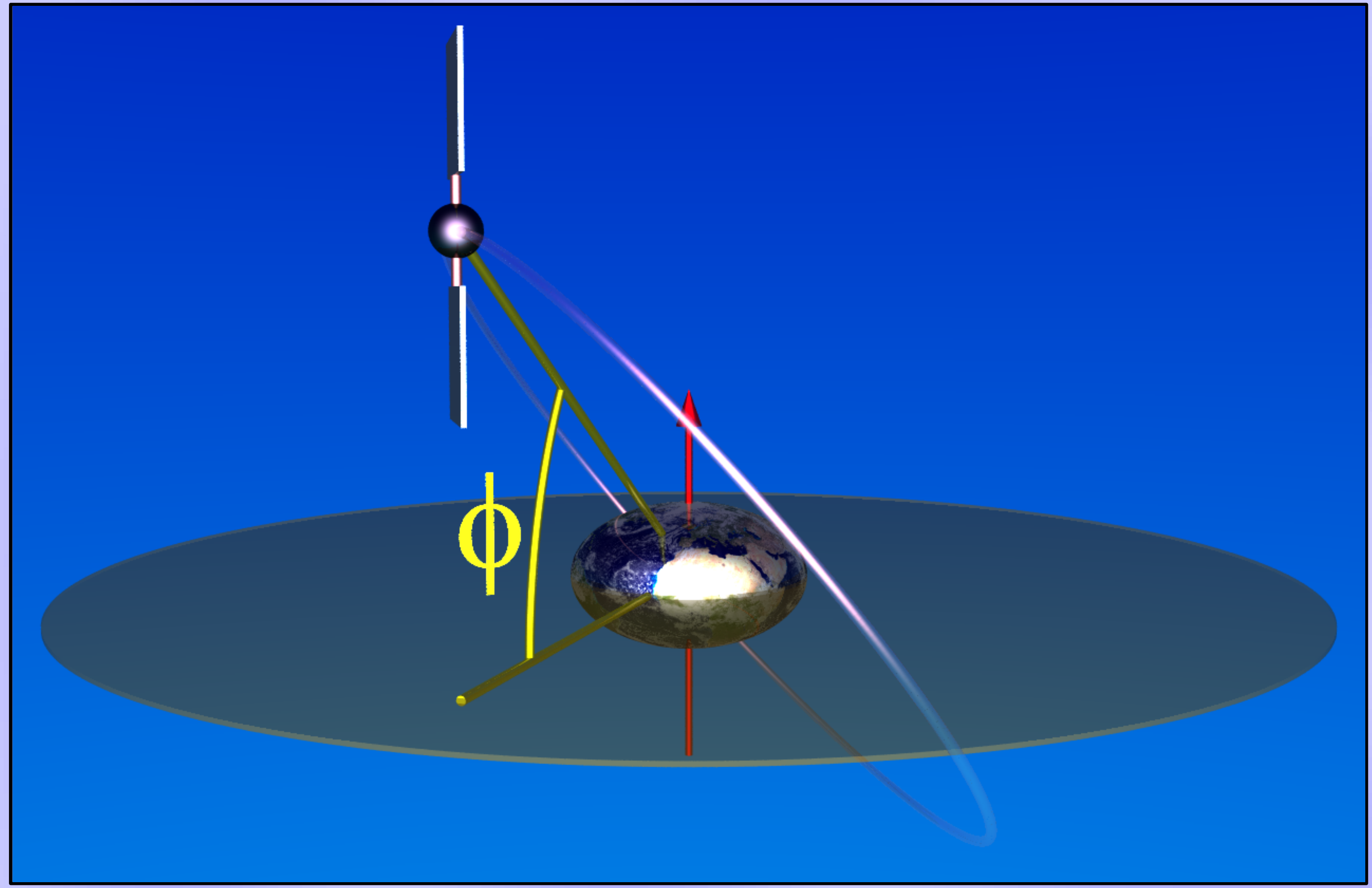
Promień biegunowy:
r_P=6357 km

Spłaszczenie Ziemi:

$$\frac{r_R - r_P}{r_P} \approx 1:298$$

Spłaszczenie Ziemi zmienia charakter jej potencjału grawitacyjnego

Potencjał grawitacyjny Ziemi



W przybliżeniu elipsoidy nie uwzględnia się geometrycznych niejednorodności geoidy oraz niesymetryczności rozkładu gęstości Ziemi.

Ze względu na symetrię obrotową potencjał Ziemi w przybliżeniu elipsoidy, widziany przez satelitę o małej masie i rozmiarach, zależy tylko od kąta biegunowego φ i odległości od środka masy.

Potencjał grawitacyjny Ziemi – pole i grawitacja normalna

Potencjał normalny- potencjał grawitacyjny pochodzący od elipsoidy obrotowej będącej przybliżeniem geoidy:

- symetria obrotowa
- stała wartość na elipsoidzie

Odstępstwa geoidy od elipsoidy normalnej nie przekraczają **100 m**.

$$U(r,\phi)=\frac{GM}{r}-\frac{GMR}{r}\left\{\frac{R}{r}\right\}^2 J_2\frac{3\sin^2(\phi)-1}{2}+.....$$

$$J_2=\frac{-1}{2MR^2}(I_x+I_y-2I_z)$$

R – półoś wielka elipsoidy normalnej

$J_2=1082.6..\times 10^{-6}$

$J_3=\quad -2.5...\times 10^{-6}$

$$F=-\nabla_{r,\theta,\phi}U=\hat{r}\left\{\frac{-GM}{r^2}+\frac{3GM(3\cos(\phi)^2)J_2R_{eq}^2}{2r^4}\right\}+\hat{\phi}\left\{\frac{3GM\cos(\phi)\sin(\phi)J_2R_{eq}^2}{r^4}\right\}$$

Potencjał grawitacyjny Ziemi – pole i grawitacja normalna

Potencjał normalny- potencjał grawitacyjny pochodzący od elipsoidy obrotowej będącej przybliżeniem geoidy:

•symetria obrotowa

•stała wartość na elipsoidzie

Odstępstwa geoidy od elipsoidy normalnej nie przekraczają **100 m**.

$$J_2 = \frac{-1}{2 M R^2}(I_x + I_y - 2 I_z)$$

R – półoś wielka elipsoidy normalnej

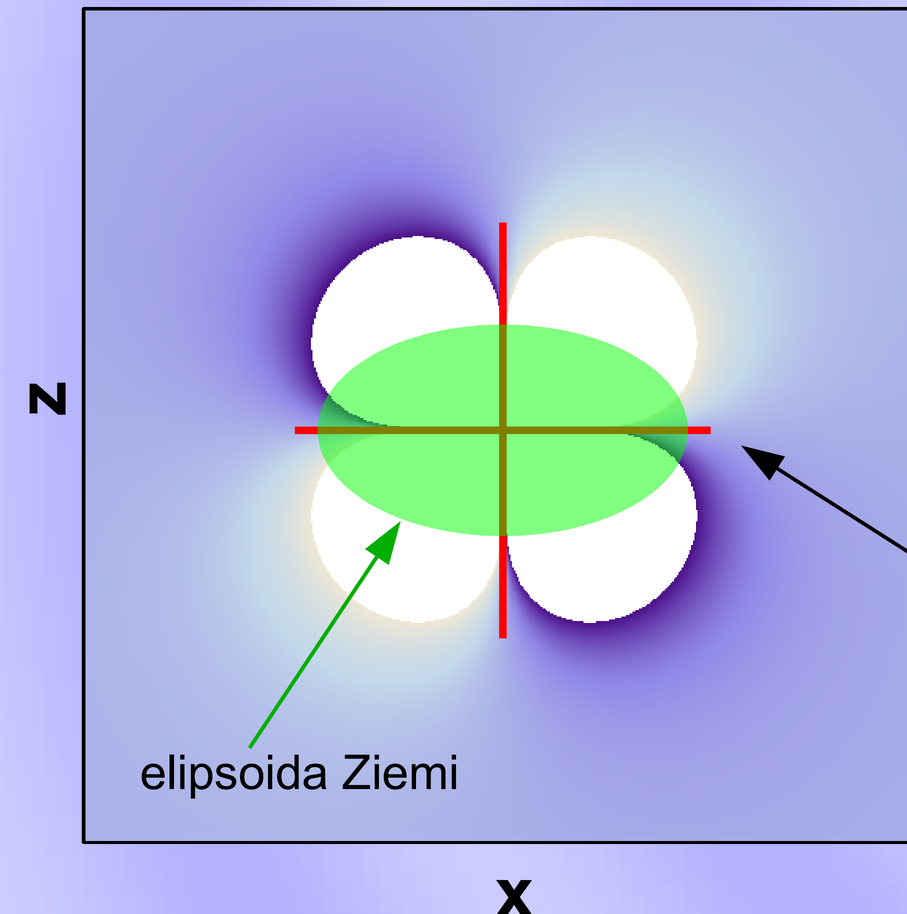
Przyspieszenie w modelu ,,J_2" nie jest skierowane do środka masy Ziemi

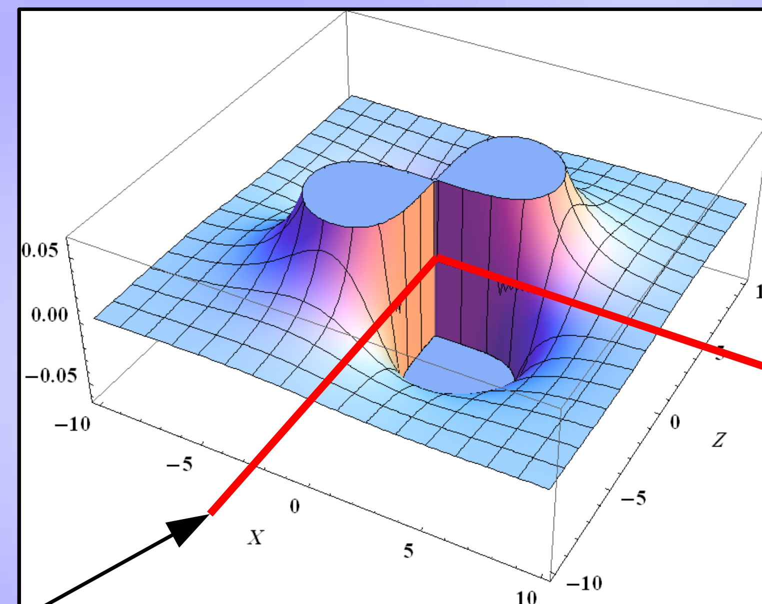
$$F = -\nabla_{r,\theta,\phi} U = \hat{r}\left\{\frac{-GM}{r^2} + \frac{3GM(3\cos(\phi)^2) J_2 R_{eq}^2}{2 r^4}\right\} + \hat{\phi}\left\{\frac{3GM\cos(\phi)\sin(\phi) J_2 R_{eq}^2}{r^4}\right\}$$

$$F \propto \frac{1}{r^4}$$

Potencjał grawitacyjny Ziemi – pole i grawitacja normalna

Przyspieszenie w modelu ,,J_2” nie jest skierowane do środka masy Ziemi





linie siły radialnej
(składowa φ jest zerowa)

Graf przedstawiający φ składową siły grawitacyjnej
(tzn. prostopadłą do składowej radialnej)

```
μ = 1;
J2 = 1; (*1 ×10^-6*)
y = 0;
Req = 6;
r = Sqrt[x^2 + y^2 + z^2];
ϕ = ArcTan[z/x];
DensityPlot[3 μ Cos[ϕ] Sin[ϕ] J2 Req^2 / r^4, {z, -10, 10}, {x, -10, 10}, PlotPoints → {100, 100}]
```

Potencjał grawitacyjny Ziemi

- W większości praktycznych zastosowań wyznaczając ruch satelitów Ziemi uwzględnić należy tylko oddziaływanie grawitacyjne (GM i J_2) oraz wpływ oporów atmosfery.

- Wpływ atmosfery jest istotny dla wysokości poniżej 1000 km.

Picture :
M. Capderou
Satellites Orbits and Missions
2005, Springer France. Springer

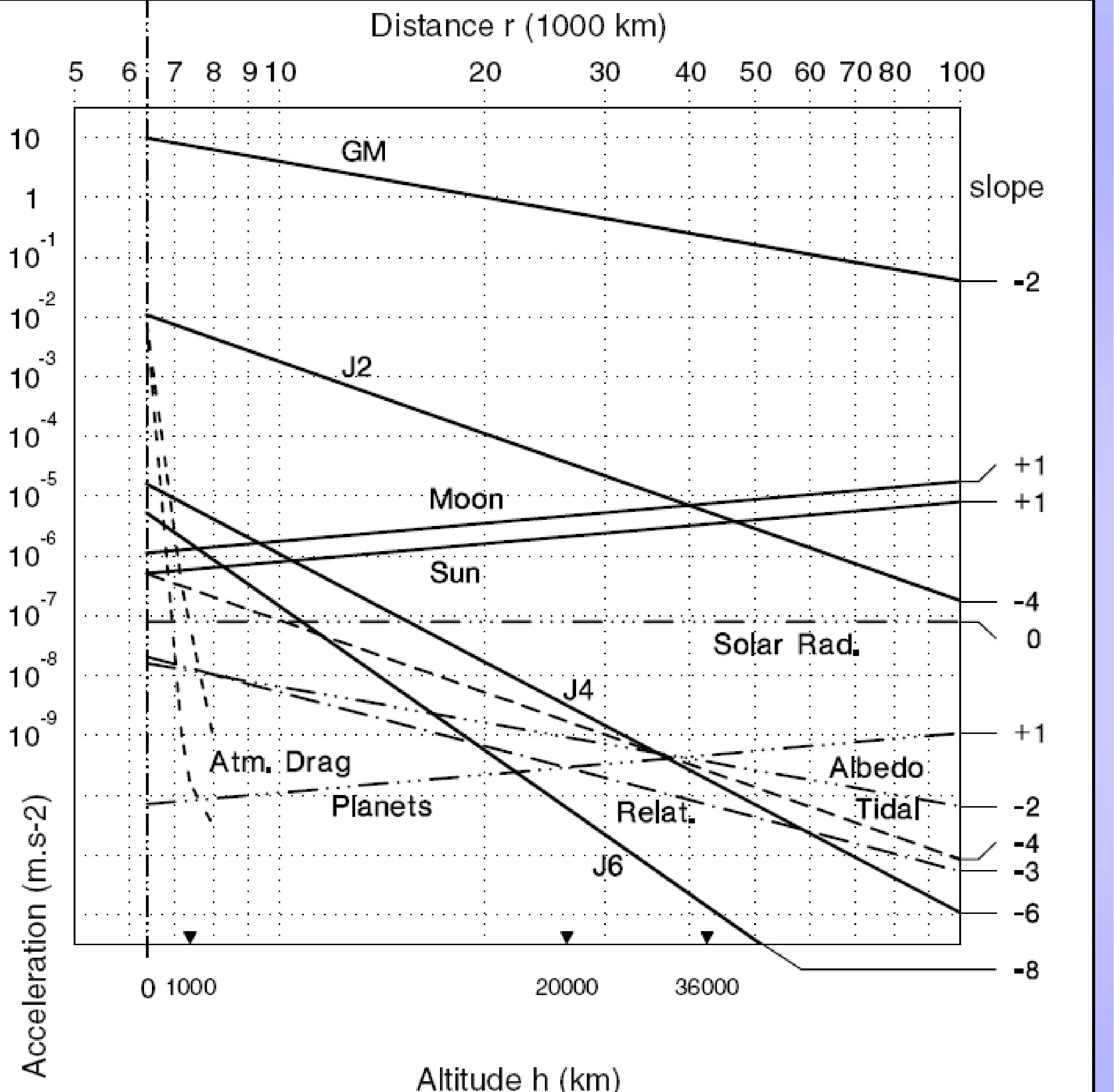
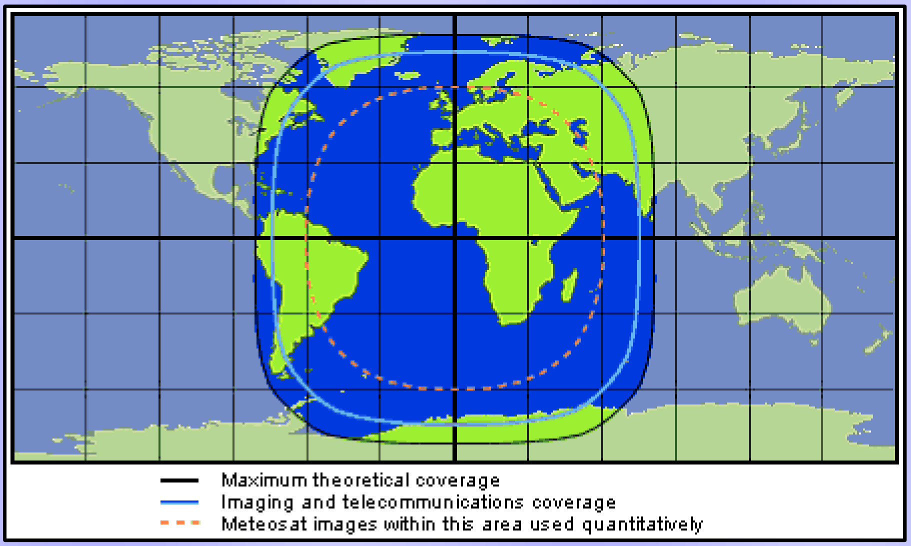


Figure 3.1. Central acceleration and perturbative accelerations as a function of the distance r of the satellite from the centre of the Earth, shown on a log–log scale. Over the ranges considered, the curves can be approximated as straight lines with gradients as noted. The altitudes of the three types of satellite have also been indicated

Orbity typu Mołnija

Orbity geostacjonarne (A. Clarke, 1945) nie dają się stosować do zapewnienia łączności na obszarach polarnych (powyżej szerokości geograficznej 55° dostępność jest utrudniona [3]).



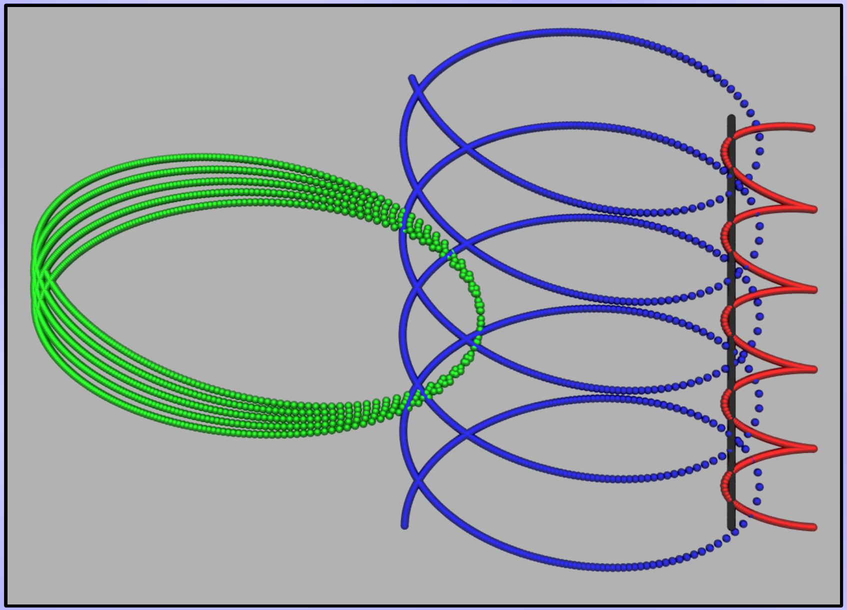
źródło www.eumetsat.int

Alternatywy:

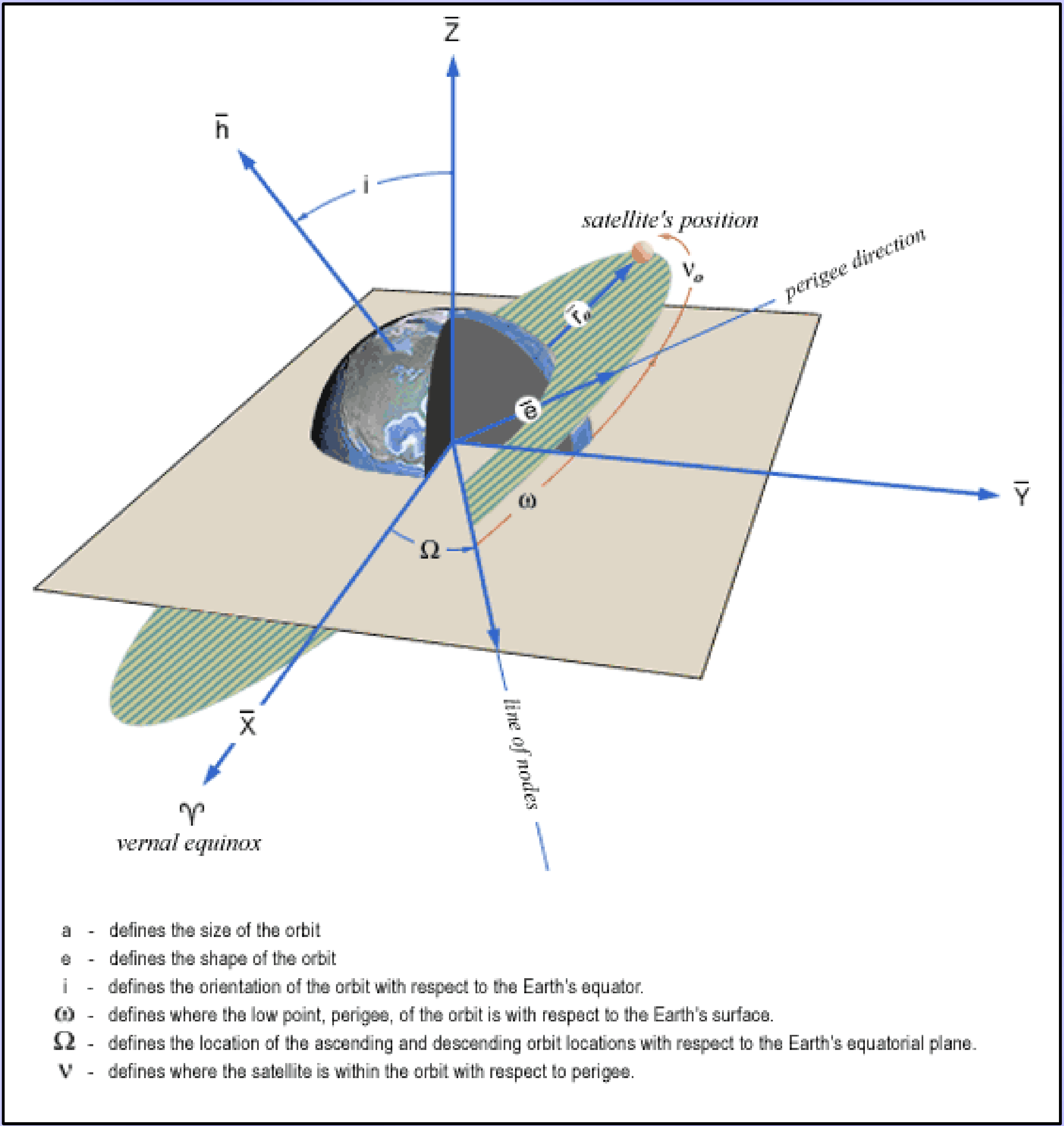
- orbity typu Tundra (nachylenie ok. 90°)
- orbity typu Mołnija

Czynnik $\mathbf{r^{-4}}$ związany z odstępstwami od kulistości powoduje, że parametry orbit ulegają zmianom

$$F = \hat{r}\left\{\frac{-GM}{r^2} + \frac{3GM(3\cos(\phi)^2)J_2R_{eq}^2}{2\mathbf{r^4}}\right\} + \hat{\phi}\left\{\frac{3GM\cos(\phi)\sin(\phi)J_2R_{eq}^2}{\mathbf{r^4}}\right\}$$



Elementy orbitalne orbit eliptycznych



a – półoś wielka

e – ekscentryczność

i – nachylenie względem płaszczyzny równika

ω – kąt apsydalny

Ω – kąt nodalny

źródło: spaceflight.nasa.gov/realdata/elements/graphs.html

Orbity typu Mołnija – zmiany elemenów orbity

Współrzędne kartezjańskie:

Keplerowskie elementy orbitalne:

$$\{x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\} \rightarrow \{a(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), M(t)\}$$

$$\ddot{r} = -\nabla U_0 + U_p \qquad U_p \ll U_0$$

$$\begin{cases} \dot{a} = g_1, \quad \dot{e} = g_2, \quad \dot{i} = g_3 \\ \dot{\Omega} = g_4, \quad \dot{\omega} = g_5, \quad \dot{M} - n_0 = g_6 \end{cases}$$

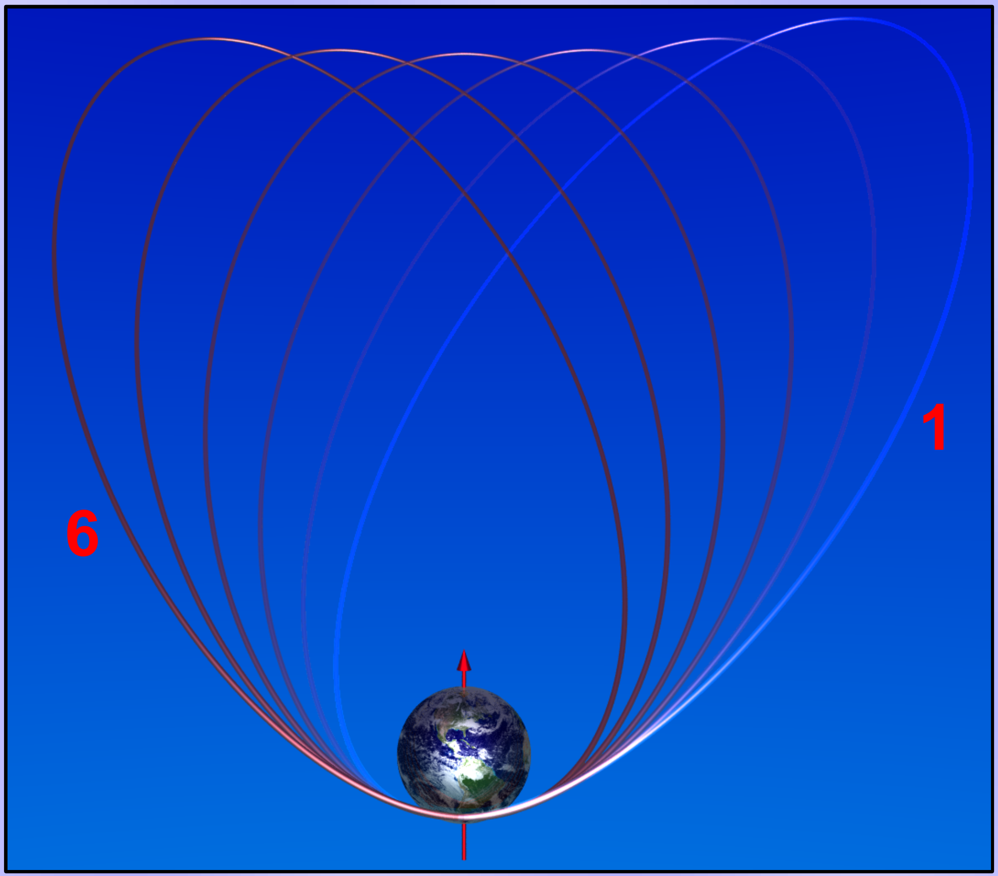
Elementy oskulacyjne (a,e,i,..) odpowiadają parametrom orbity Keplerowskiej po jakiej podążałby satelita po ustaniu zaburzenia U_p.

Rachunek zaburzeń prowadzi do następujących zależności (przybliżenie elipsoidy, 2 rząd):

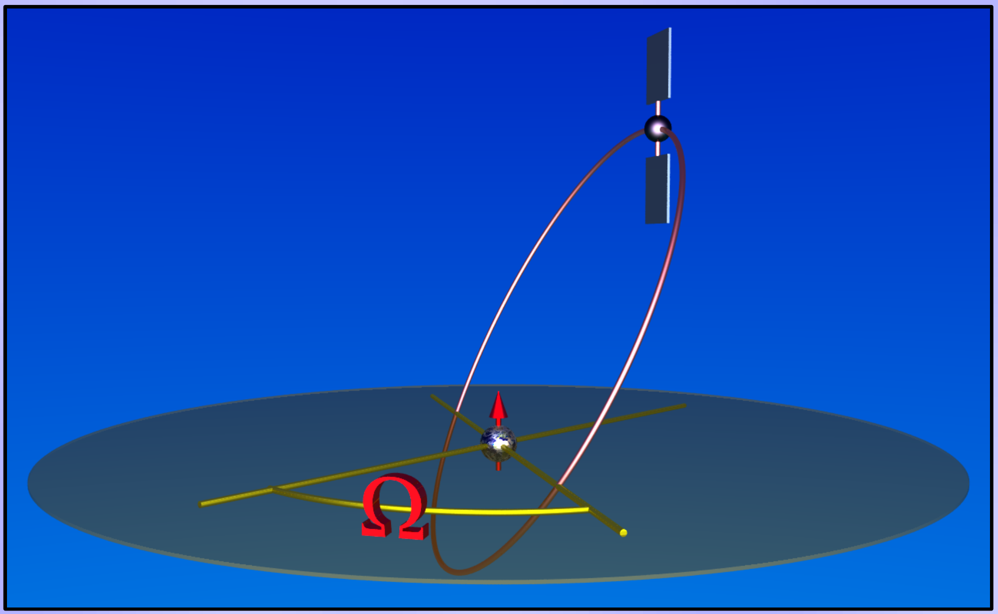
$$\dot{a} = 0 \qquad \dot{e} = 0 \qquad \dot{i} = 0 \qquad \dot{\Omega} = \ldots \qquad \dot{M} = \ldots$$

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4(1-e^2)^{3/2}} n J_2 \left\{\frac{R}{a}\right\}^2 (5\cos^2 i - 1)$$

Orbity keplerowskie – precesja nodalna



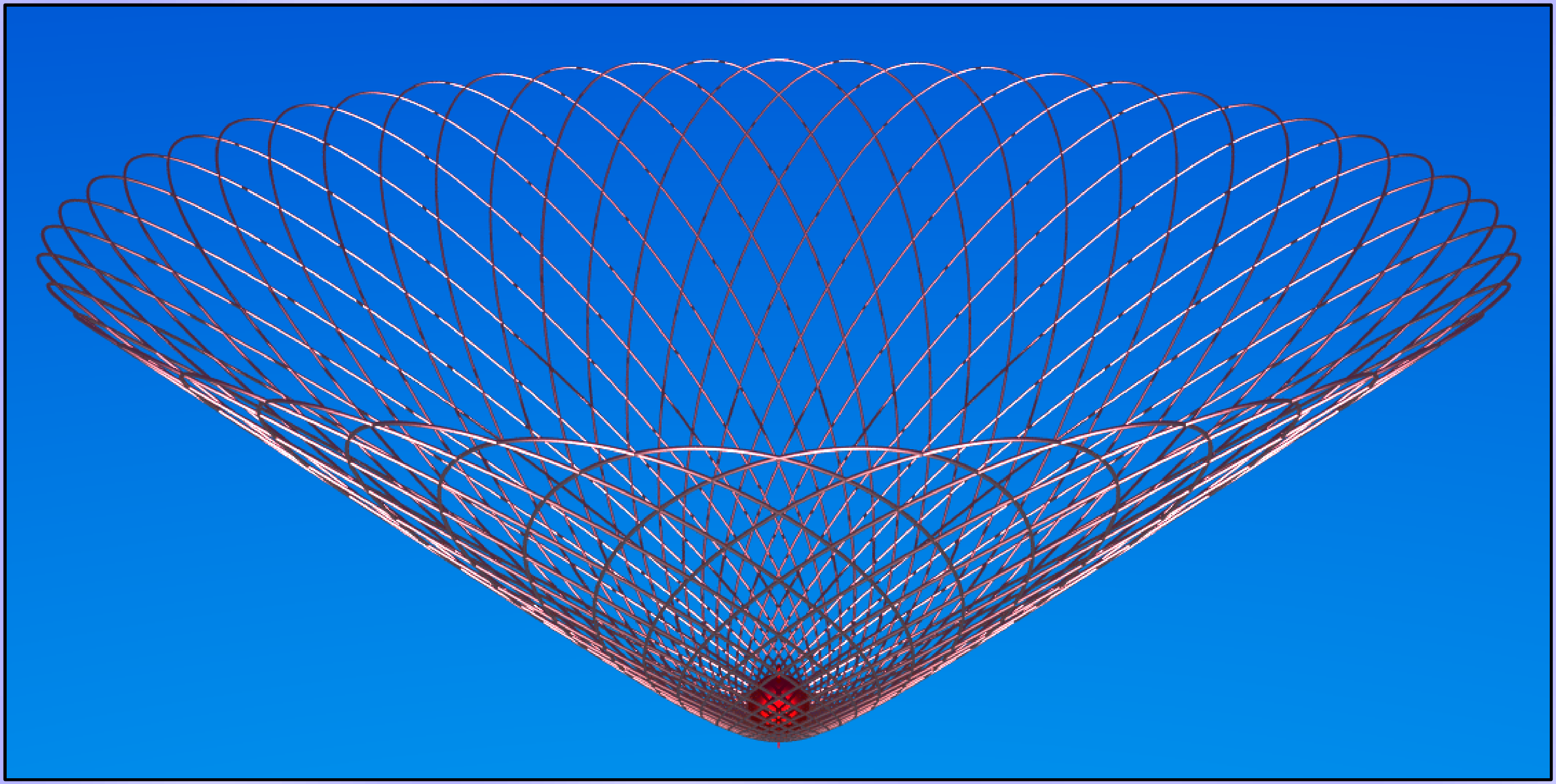
widok z boku



Ω - kąt nodalny

Orbita: a-90000km, b-35000,
nachylenie 40°

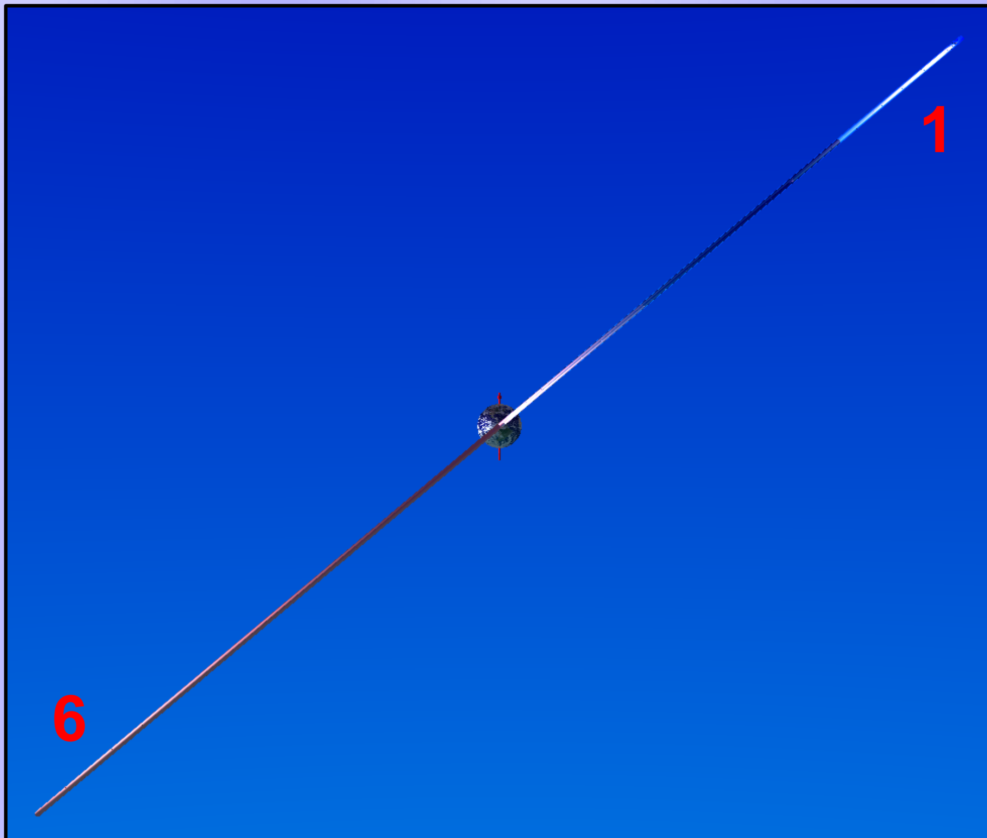
Orbity keplerowskie – precesja nodalna



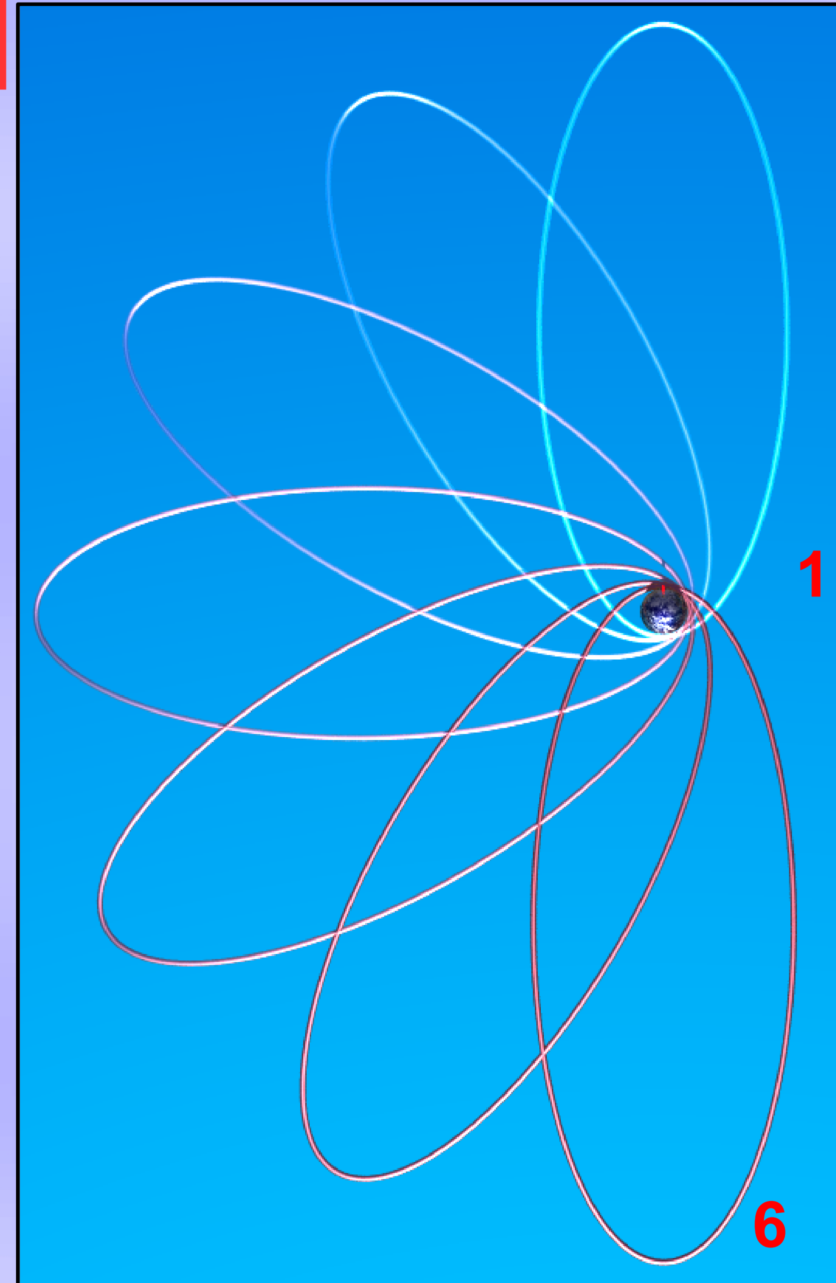
Precesja nodalna otacza Ziemię ,,**koszykiem**" z elips oskulacyjnych

Orbita: a-90000km, b-35000,
nachylenie 40^o

Orbity keplerowskie – precesja apsydalna



widok z boku



widok z normalnej do płaszczyzny ruchu orbity przechodzącej przez Ziemię

Orbita: a-90000km, b-35000, nachylenie 40^o

Orbity typu Mołnija – precesja apsydalna

$$\dot{\omega}=\frac{3}{4(1-e^2)^{3/2}}\, n\, J_2 \left\{\frac{R}{a}\right\}^2 (5\cos^2 i-1)$$

$$i \approx 63.43^o \quad \rightarrow \quad \dot{\omega}=0$$

$i \approx 116.6^o$

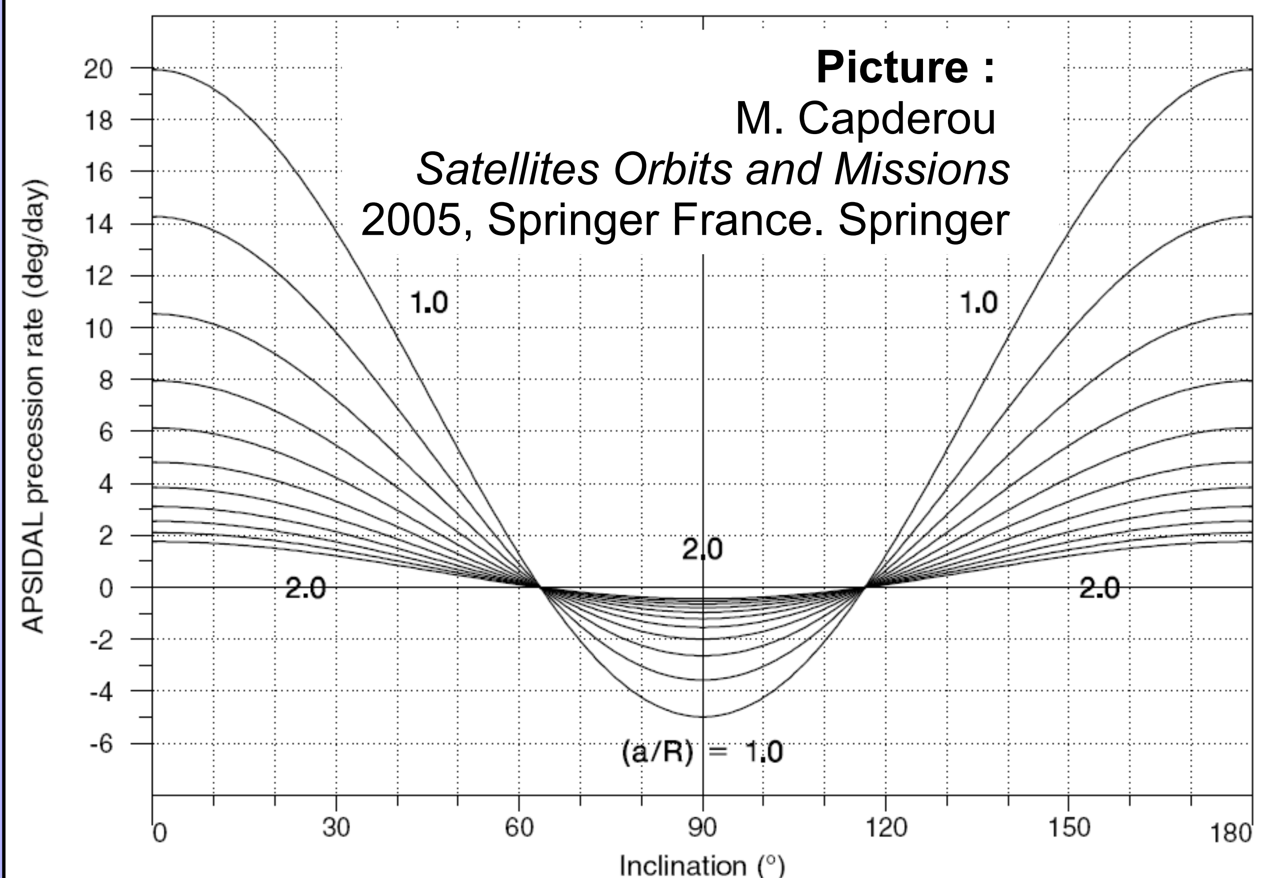
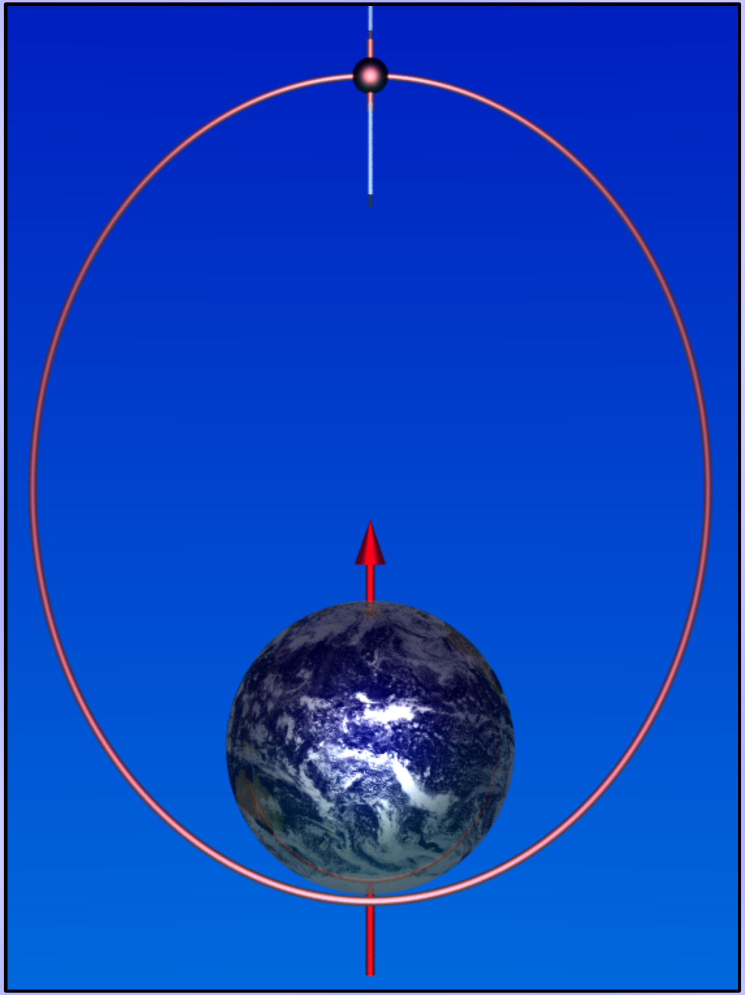


Figure 4.1. Precession rate (in degree/day) as a function of inclination i for various values of the ratio $\eta = a/R$ from $\eta = 1.0$ to $\eta = 2.0$, in steps of 0.1. *Upper*: nodal precession $\dot{\Omega}$. *Lower*: apsidal precession $\dot{\omega}$

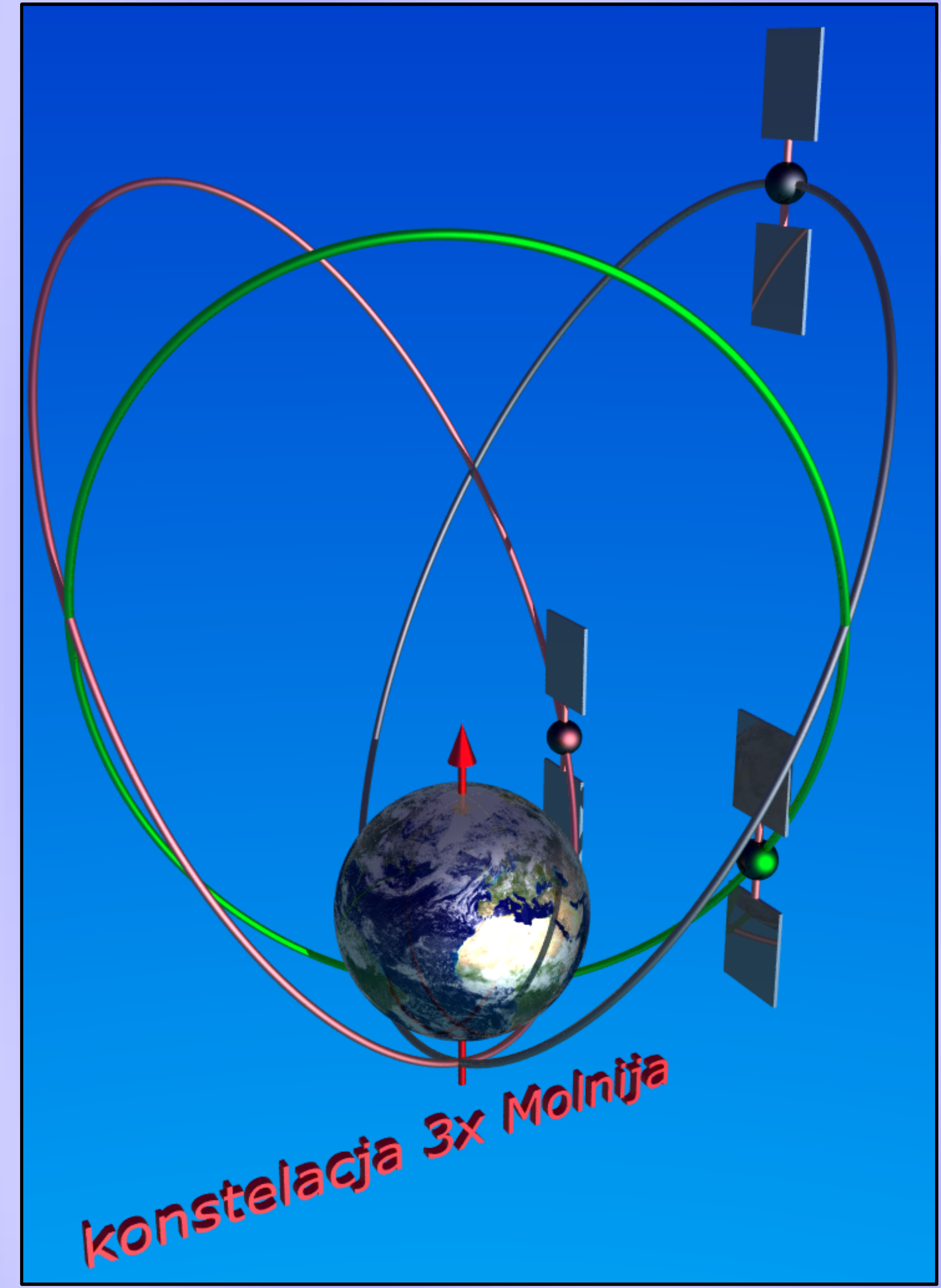
Orbity typu Mołnija – precesja apsydalna

$$i \approx 63.43^o \quad \rightarrow \quad \dot{\omega} = 0$$

Duża ekscentryczność orbity skutkuje znaczną różnicą wysokości w apogeum (ok. 40 000km) i w perigeum (ok. **500 km**)



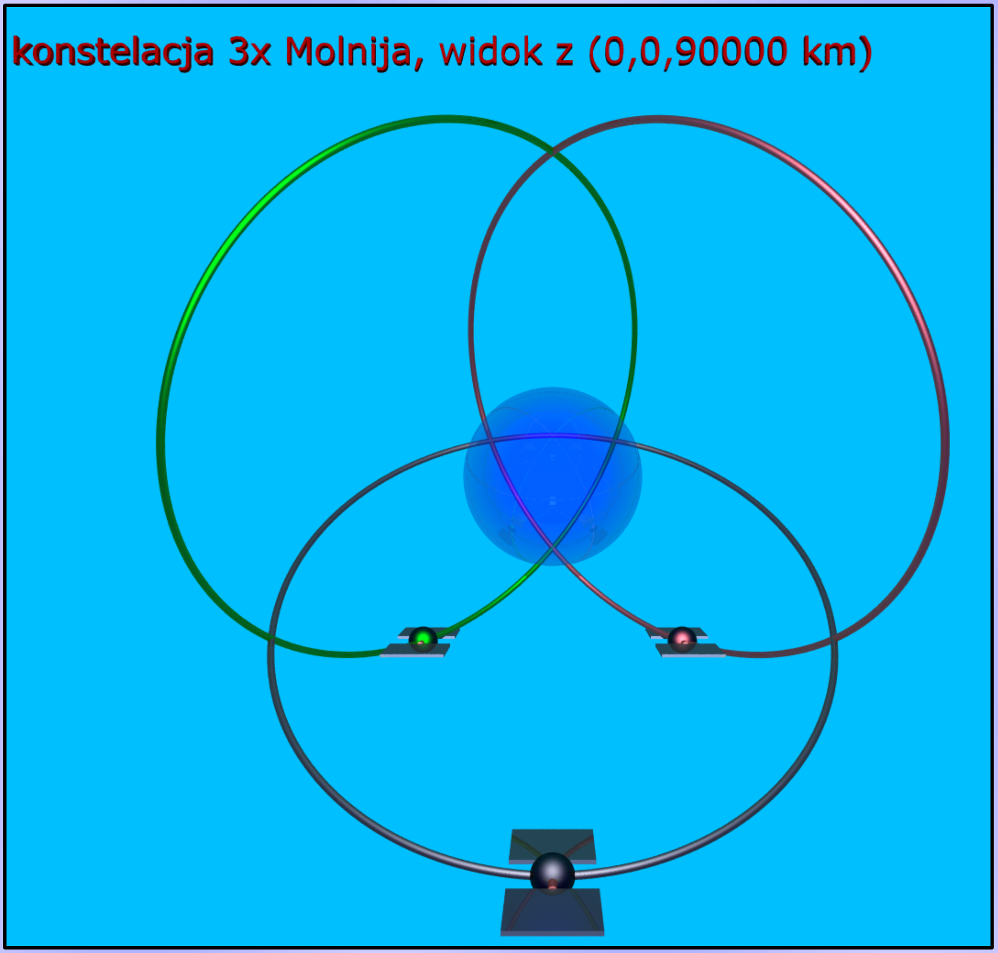
Orbity typu Mołnija



- period ok. 717 min
- konstelacja trzech satelitów (Δt = 239 min) zapewnia ciągłe pokrycie
- ze względu na dużą ekscentryczność satelita znaczną część obiegu spędza w okolicach apogeum – **nad biegunem***

*drugie prawo Keplera

Orbity typu Mołnija



- period ok. 717 min
- konstelacja trzech satelitów (Δt = 239 min) zapewnia ciągłe pokrycie
- ze względu na dużą ekscentryczność satelita znaczną część obiegu spędza w okolicach apogeum – **nad biegunem***

*drugie prawo Keplera

WNIOSKI

- Orbity keplerowskie w polach typu r^{-n} ($n \leq -3$) są niestabilne
- Ze względu na spłaszczenie Ziemi jej pole grawitacyjne nie ma charakteru r^{-2}
- Orbity typu Mołnija pozwalają zredukować wpływ spłaszczenia ziemi na ruch satelitów

Literatura

[1] Б.Е.Черток, *Ракеты и люди. Горячие дни холодной войны,* Москва "МАШИНОСТРОЕНИЕ", 1999; www.rtc.ru/encyk/bibl/chertok/kniga-3/obl.html

[2] N. Sneeuw, *Geodesy and Geodynamics*, notatki do wykładu, Geodätisches Institut, Universität Stuttgart, www.uni-stuttgart.de/gi/education/short_descriptions.en.html

[3] M. Capderou, *Satellites Orbits and Missions*, Springer, France 2005

[4] Wikipedia, wikipedia.org

[5] część ilustracji wykonano za pomocą programu POV-Ray, www.povray.org

[6] S. A. Whitmore, *Astrodynamics*, web.nps.navy.mil/śsewb/AA4362/AA4362.html

[7] strony www National Space Agnecy USA, nasa.gov

[8] M. Gruntman, pliki wideo – astronauticsnow.com/vp/

[9] R. Fitzpatrick, *Analytical Classical Dynamics,* www.lulu.com/items/volume_63/3801000/3801546/1/print/336b.pdf

[10] Landesamt für Archäologie Sachsen-Anhalt, dysk z Nebry, www.lda-lsa.de/himmelsscheibe_von_nebra/#content