Instytut Fizyki Molekularnej
Polskiej Akademii Nauk

MONOGRAFIA

Waldemar Tomaszewski
Natalia Bielejewska

# Wstęp do dynamiki lin i łańcuchów

Poznań
2021

**Waldemar Tomaszewski, Natalia Bielejewska**
*Wstęp do dynamiki lin i łańcuchów*

Wydawca:
Instytut Fizyki Molekularnej Polskiej Akademii Nauk©
Mariana Smoluchowskiego 17
60-179 Poznań
Rok wydania: 2021

**ISBN: 978-83-956445-8-0**

Pracę dedykujemy pamięci Pana Profesora Piotra Pierańskiego

# Spis treści

**Spis rysunków** . . . . . **vi**

**Spis podstawowych oznaczeń** . . . . . **ix**

**1 Wprowadzenie** . . . . . **1**

**2 Model matematyczny i równania ruchu lin i łańcuchów** . . . . . **5**
2.1 Model ciągły liny . . . . . 7
2.1.1 Model matematyczny liny . . . . . 7
2.1.2 Krzywa łańcuchowa . . . . . 10
2.1.3 Dyskretna krzywa łańcuchowa . . . . . 12
2.2 Model dyskretny liny . . . . . 16
2.3 Równania ruchu dyskretnego modelu liny . . . . . 18
2.3.1 Równania ruchu układu prętów (Model A) . . . . . 20
2.3.2 Postać macierzowa równań ruchu . . . . . 23
2.3.3 Równania ruchu układu wahadeł (Model B) . . . . . 23
2.4 Równania ruchu liny w postaci bezwymiarowej . . . . . 28
2.5 Modyfikacje równań ruchu liny . . . . . 29
2.5.1 Sprężystość złącz między segmentami . . . . . 29
2.5.2 Ruch punktu zaczepienia liny . . . . . 32
2.6 Podsumowanie . . . . . 32

**3 Całkowanie numeryczne równań ruchu** . . . . . **34**
3.1 Zagadnienie początkowe pierwszego rzędu . . . . . 34
3.2 Kryteria wyboru metody numerycznej . . . . . 35
3.2.1 Rząd metody . . . . . 36
3.2.2 Stabilność metody . . . . . 37
3.3 Pakiety obliczeniowe . . . . . 38
3.3.1 Przegląd algorytmów . . . . . 39
3.3.2 Testy algorytmów . . . . . 40
3.4 Analiza stabilności równań ruchu . . . . . 41
3.5 Testy numeryczne . . . . . 43
3.5.1 Zagadnienie testowe spadku liny . . . . . 43

3.5.2 Testy wydajności algorytmów numerycznych . . . 43
3.6 Opis algorytmów . . . 53
3.6.1 Metody Rungego-Kutty . . . 53
3.6.2 Implementacja metody jawnej Rungego–Kutty . . . 54
3.6.3 Implementacja metody niejawnej Rungego–Kutty . . . 56
3.7 Podsumowanie . . . 57

**4 Spadek swobodny łańcucha złożonego . . . 59**
4.1 Rozwiązanie analityczne dla spadającego końca łańcucha złożonego . . . 60
4.1.1 Analiza energii spadającego łańcucha . . . 61
4.1.2 Analiza sił działających na zgięciu łańcucha . . . 66
4.2 Eksperymenty dla łańcucha złożonego . . . 69
4.3 Symulacje numeryczne spadku łańcucha złożonego . . . 77
4.3.1 Łańcuch idealny początkowo złożony . . . 77
4.3.2 Łańcuch idealny początkowo wiszący swobodnie . . . 81
4.3.3 Łańcuch rzeczywisty początkowo wiszący swobodnie . . . 84
4.3.4 Analiza wyników symulacji spadku łańcucha złożonego . . . 88
4.4 Podsumowanie . . . 91

**5 Spadek swobodny łańcucha rozwartego . . . 92**
5.1 Doświadczenia laboratoryjne dla rozwartych łańcuchów . . . 93
5.2 Symulacje numeryczne dla rozwartego łańcucha . . . 94
5.2.1 Wybór parametrów symulacji . . . 94
5.2.2 Wyniki symulacji . . . 95
5.3 Analiza wyników symulacji spadku łańcucha . . . 96
5.4 Podsumowanie . . . 104

**6 Siły działające podczas spadku łańcucha . . . 105**
6.1 Rozwiązanie analityczne spadku środka masy łańcucha . . . 106
6.2 Analiza sił w chwili początkowej spadku łańcucha . . . 110
6.2.1 Układ sił przed spadkiem łańcucha $t = 0^-$ . . . 111
6.2.2 Układ sił w chwili spadku łańcucha $t = 0^+$ . . . 112
6.2.3 Porównanie sił działających na punkt $O$ w chwili $t = 0^-$ i $t = 0^+$ . . . 113
6.3 Układ sił podczas spadku łańcucha . . . 115
6.3.1 Analiza siły poziomej w punkcie wsparcia łańcucha . . . 118
6.3.2 Analiza siły pionowej w punkcie wsparcia podczas spadku łańcucha . 120

6.4 Podsumowanie . . . . . 122

**7 Strzał z bicza . . . . . 124**
7.1 Wstęp . . . . . 124
7.1.1 Historia problemu . . . . . 125
7.1.2 Doświadczenia . . . . . 125
7.2 Model analityczny bicza . . . . . 126
7.2.1 Symulacja strzału z bicza idealnego . . . . . 128
7.2.2 Prędkość spadającej liny . . . . . 132
7.3 Strzał z bicza prostego . . . . . 133
7.3.1 Budowa bicza i techniki strzału . . . . . 133
7.3.2 Warunki początkowe dla wybranej techniki strzału z bicza . . . . . 134
7.3.3 Symulacje strzału z bicza . . . . . 135
7.4 Strzał z bicza australijskiego . . . . . 140
7.4.1 Budowa bicza australijskiego . . . . . 140
7.4.2 Symulacje komputerowe . . . . . 141
7.5 Podsumowanie . . . . . 145

**8 Zakończenie . . . . . 147**

**Bibliografia . . . . . 150**

# Spis rysunków


2.1 Model ciągły liny . . . . . 8
2.2 Krzywa łańcuchowa . . . . . 11
2.3 Model dyskretnej krzywej łańcuchowej . . . . . 13
2.4 Kształt dyskretnej krzywej łańcuchowej . . . . . 15
2.5 Porównanie kształtu realnego łańcucha i liny . . . . . 16
2.6 Współrzędne uogólnione dla modelu liny . . . . . 17
2.7 Dyskretny model liny reprezentowany jako układ prętów . . . . . 20
2.8 Dyskretny model liny reprezentowany jako układ wahadeł . . . . . 24
2.9 Porównanie modeli sprężystości złącz . . . . . 30
2.10 Funkcje opisujące sprężystość złącz . . . . . 31

3.1 Symulacja spadku liny dla *Modelu A* i *Modelu B* . . . . . 45
3.2 Diagram zależności nakładu pracy od precyzji – *Eksperyment I* . . . . . 46
3.3 Diagram zależności nakładu pracy od precyzji – *Eksperyment II* . . . . . 47
3.4 Diagram zależności nakładu pracy od parametru $k$ . . . . . 48
3.5 Diagram zależności nakładu pracy od precyzji – *Eksperyment III* . . . . . 49
3.6 Diagram zależności nakładu pracy od parametru $r$ . . . . . 50
3.7 Błąd energii całkowitej – *Eksperyment I* . . . . . 51
3.8 Błąd energii całkowitej – *Eksperyment II* . . . . . 51
3.9 Czas obliczeń dla różnych wartości parametru dyskretyzacji $n$ . . . . . 52

4.1 Model analityczny łańcucha podczas spadku . . . . . 61
4.2 Prędkość końca łańcucha i swobodnie spadającego ciała . . . . . 64
4.3 Energia i gęstość energii podczas spadku łańcucha . . . . . 65
4.4 Schemat połączenia dwóch części łańcucha podczas spadku . . . . . 67
4.5 Prędkość i przyspieszenie końca łańcucha złożonego . . . . . 69
4.6 Łańcuchy zastosowanie w doświadczeniach . . . . . 70
4.7 Eksperyment spadku łańcucha złożonego rejestrowany z prędkością 1000 klatek na sekundę . . . . . 71
4.8 Eksperyment spadku łańcucha złożonego: rozkład parametrów ruchu . . . . . 72
4.9 Eksperyment spadku łańcucha złożonego: rejestracja trajektorii ruchu . . . . 73
4.10 Eksperyment spadku łańcucha złożonego rejestrowany z prędkością 2000 klatek na sekundę . . . . . 74

4.11 Eksperyment spadku łańcucha złożonego: rozkład parametrów ruchu . . . . . 75
4.12 Eksperyment spadku łańcucha złożonego: rejestracja trajektorii ruchu . . . . 76
4.13 Eksperyment spadku złożonego łańcucha . . . . . 77
4.14 Symulacja spadku łańcucha złożonego . . . . . 79
4.15 Prędkość i przyspieszenie spadającego końca łańcucha złożonego . . . . . 80
4.16 Drgania wzbudzone podczas spadku łańcucha początkowo zgiętego . . . . . 81
4.17 Symulacja spadku łańcucha wiszącego swobodnie z $x_0 = 0,03\ m$ . . . . . 82
4.18 Prędkość i przyspieszenie spadającego końca łańcucha wiszącego swobodnie . 83
4.19 Drgania wzbudzone podczas spadku łańcucha wiszącego swobodnie . . . . . 84
4.20 Symulacja spadku realnego łańcucha dla $x_0 = 0,03\ m$ . . . . . 86
4.21 Prędkość i przyspieszenie spadającego końca łańcucha realnego . . . . . 87
4.22 Końcowa faza spadku realnego łańcucha . . . . . 88
4.23 Energia łańcucha złożonego podczas spadku . . . . . 90

5.1 Odchylenie końca łańcucha od pozycji początkowej . . . . . 97
5.2 Wyniki symulacji komputerowej dla spadku łańcucha . . . . . 98
5.3 Prędkość i przyspieszenie końca łańcucha w eksperymentach $a$) – $d$) . . . . . 100
5.4 Maksymalna prędkość i przyspieszenie końca łańcucha w zależności od $x_0$ . . 101
5.5 Czas i wychylenie końca łańcucha przy osiągnięciu maksymalnej prędkości . 102

6.1 Model analityczny łańcucha podczas spadku . . . . . 107
6.2 Ruch środka masy spadającego łańcucha . . . . . 108
6.3 Dystans i czas spadku środka masy $\gamma$ . . . . . 110
6.4 Rozkład sił działających na łańcuch w równowadze i na początku spadku . . 111
6.5 Siły działające na podporę łańcucha w chwili $t = 0^-$ i $t = 0^+$ . . . . . 114
6.6 Kształt krzywych łańcuchowych dla $x_0 \approx L$ . . . . . 115
6.7 Siły działające na punkt $O$ w symulacjach $a$) – $d$) . . . . . 117
6.8 Maksymalne wartości siły poziomej w punkcie wsparcia $O$, w zależności od $x_0$ 118
6.9 Pozioma składowa siły $-F_x^O(t)$ dla $x_0 \to L$ . . . . . 120
6.10 Maksymalne wartości siły pionowej w punkcie wsparcia $O$, w zależności od $x_0$ 121
6.11 Pionowa składowa siły $F_y^O(t)$ dla $x_0 \to L$ . . . . . 122

7.1 Analityczny model bicza . . . . . 127
7.2 Prędkość i przyspieszenie końca bicza idealnego . . . . . 129
7.3 Gęstość energii kinetycznej w rzemieniu w kolejnych fazach jego ruchu . . . . 130
7.4 Technika strzału z bicza prostego . . . . . 134

7.5 Warunki początkowe ruchu bicza prostego . . . . . 135
7.6 Symulacja ruchu rzemienia z zadaną prędkością początkową . . . . . 136
7.7 Symulacja ruchu rzemienia z ruchomą rękojeścią . . . . . 137
7.8 Symulacja ruchu rzemienia rzeczywistego z ruchomą rękojeścią . . . . . 138
7.9 Prędkość i przyspieszenie końca bicza prostego . . . . . 139
7.10 Technika strzału z bicza australijskiego . . . . . 141
7.11 Symulacja ruchu bicza australijskiego $a^O = 200\ m/s^2$ . . . . . 142
7.12 Symulacja ruchu bicza australijskiego $a^O = 3200\ m/s^2$ . . . . . 143
7.13 Prędkość i przyspieszenie końca bicza australijskiego . . . . . 144
7.14 Gęstość energii kinetycznej bicza australijskiego . . . . . 145

8.1 Symulacja efektu ”fontanny łańcuchowej” . . . . . 149

# Spis podstawowych oznaczeń

| | |
|---|---|
| $t$ | Czas. |
| $\tau$ | Czas w postaci bezwymiarowej. |
| $L$ | Długość łańcucha/liny. |
| $l$ | Długość segmentu łańcucha/liny (ogniwa). |
| $M$ | Masa łańcucha/liny. |
| $m$ | Masa segmentu łańcucha/liny (ogniwa). |
| $n$ | Liczba ogniw łańcucha, parametr dyskretyzacji. |
| $g$ | Wartość przyspieszenia grawitacyjnego w pobliżu Ziemi. |
| $k$ | Współczynnik sprężystości złącza między ogniwami łańcucha. |
| $r$ | Współczynnik tłumienia złącza między ogniwami łańcucha. |
| $\kappa$ | Współczynnik sprężystości złącza między ogniwami łańcucha w postaci bezwymiarowej. |
| $\rho$ | Współczynnik tłumienia złącza między ogniwami łańcucha w postaci bezwymiarowej. |
| $\gamma$ | Przyspieszenie grawitacyjne ciała w pobliżu Ziemi w postaci bezwymiarowej. |
| $xy$ | Układ współrzędnych mający dwie prostopadłe osie $x$, $y$. |
| $O$ | Punkt przecięcia się osi w układzie współrzędnych $xy$. |
| $s$ | Długość łuku krzywej opisującej linę. |
| $(x(s,t),\ y(s,t))$ | Kształt liny/łańcucha we współrzędnych $xy$ w punkcie $s$ w chwili $t$. |
| $\varphi(s,t)$ | Kąt nachylenia stycznej do krzywej opisującej łańcuch/linę w punkcie $s$ w chwili $t$. |
| $(x(s),\ y(s))$ | Kształt liny/łańcucha we współrzędnych kartezjańskich $xy$ w punkcie $s$. |
| $\varphi(s)$ | Kąt nachylenia stycznej do krzywej opisującej łańcuch/linę w punkcie $s$. |
| $T(t)$ | Energia kinetyczna układu w chwili $t$. |
| $U(t)$ | Energia potencjalna układu w chwili $t$. |

| | |
|---|---|
| $I_i$ | Moment bezwładności $t$-tego segmentu względem osi przechodzącej przez jego środek masy i prostopadłej do segmentu. |
| $\mathcal{L}$ | Funkcja Lagrange'a, zdefiniowaną jako różnica energii $T$ i $U$. |
| $\mathcal{R}$ | Funkcję dyssypacyjna Rayleigha. |
| $x_0,\ y_0$ | Punkt zaczepienia łańcucha/liny. |
| $x_i,\ y_i$ | Współrzędne $i$-tego segmentu łańcucha/liny. |
| $\varphi_i$ | Kąt opisujący $i$-ty segment łańcucha/liny. |
| $\dot{\varphi}_i$ | Pochodna $\varphi_i$ względem czasu. |
| $\ddot{\varphi}_i$ | Druga pochodna $\varphi_i$ względem czasu. |
| $\mathbf{M}$ | Macierz bezwładności. |
| $\mathbf{E}$ | Macierz współczynników sprężystości. |
| $\mathbf{D}$ | Macierz współczynników dyssypacji. |
| $m_{i,j}$ | Elementy macierzy bezwładności $M$. |
| $e_{i,j}$ | Współczynniki sprężystości $e_{i,j}$, elementy macierzy $E$. |
| $d_{i,j}$ | Współczynników dyssypacji $d_{i,j}$, elementy macierzy $D$. |
| $\vec{Q}$ | Siła grawitacji. |
| $\vec{g}$ | Przyspieszenie grawitacyjne. |
| $c_i$ | Współczynniki $\cos(\varphi_i)$. |
| $s_i$ | Współczynniki $\sin(\varphi_i)$. |
| $c_{i,j}$ | Współczynniki $\cos(\varphi_i - \varphi_j)$. |
| $s_{i,j}$ | Współczynniki $\sin(\varphi_i - \varphi_j)$. |
| $q_i$ | Współczynniki związane z grawitacyjnym oddziaływaniem na łańcuch/linę. |
| $\mathbf{C}$ | Macierz współczynników $m_{i,j}c_{i,j}$. |
| $\mathbf{S}$ | Macierz współczynników $m_{i,j}s_{i,j}$. |
| $\mathbf{G}$ | Wektor współczynników $q_i c_i$. |
| $\mathcal{O}$ | Notacja określająca złożoność obliczeniową. |
| $\alpha$ | Parametr modelu sprężystości złącz. |
| $a_i$ | Współczynniki związane z ruchem zaczepienia łańcucha w osi $x$. |

| | |
|---|---|
| $b_i$ | Współczynniki związane z ruchem zaczepienia łańcucha w osi $y$. |
| $\mathbf{A}$ | Macierz współczynników $a_i s_i$. |
| $\mathbf{B}$ | Macierz współczynników $b_i c_i$. |
| $\mathbb{R}$ | Przestrzeń liczb rzeczywistych. |
| $\mathbb{C}$ | Przestrzeń liczb zespolonych. |
| $\mathcal{S}$ | Obszar stabilności metody numerycznej. |
| $h$ | Zmienna opisująca spadek końca łańcucha. |

# Rozdział 1
# Wprowadzenie

Dynamika lin i łańcuchów nie jest zagadnieniem nowym i występuje powszechnie w życiu codziennym oraz wielu dziedzinach takich jak architektura, inżynieria mechaniczna, lotnictwo czy nawet biologia (badania właściwości struktur$DNA/RNA$). Szereg problemów związanych z tą tematyką wymaga wciąż wyjaśnienia i jest przedmiotem zarówno badań eksperymentalnych jak i prac teoretycznych wykorzystujących zaawansowane metody rejestracji i techniki komputerowe.

Przykładem może być tu artykuł *Shape of a Cracking Whip* Alaina Goriely'ego i Tylera McMillena, opublikowany w *Physical Review Letters* [1], w którym autorzy zaprezentowali wyniki symulacji numerycznej potwierdzające hipotezę osiągania przez koniec bicza olbrzymich prędkości i przyspieszeń. Innym przykładem jest intensywnie badany w ostatnich latach spektakularny efekt fontannowy łańcucha [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Efekt ten polega na tym, że łańcuch koralików wysuwa się z pojemnika pod wpływem własnego ciężaru i jednocześnie unosi się w górę tworząc kształt przypominający fontannę. Podobne zjawisko powstania fali w napędzanym łańcuchu opisane zostało w pracy [10].

Należy podkreślić, że wielu autorów zajmowało się na pozór odrębnymi zagadnieniami jak spadek łańcucha, lot żyłki wędkarskiej, dynamika pantografu czy strzał z bicza. Zagadnienia te wydawały się być niepowiązane ze sobą i rozpatrywane były na różnych płaszczyznach. Wstępna analiza tych problemów pokazała, że większość z nich sprowadzić można do problemu spadku liny w polu grawitacyjnym, której jeden koniec przymocowany jest do stałego punktu (lub poruszającego się po zadanej trajektorii) a drugi jest swobodny.

Ten generyczny problem dynamiki liny jest przedmiotem niniejszej monografii. Warto tu wspomnieć, że możliwość ujednoliconego sposobu rozwiązywania problemów powiązanych z zagadnieniem spadku łańcucha została przedstawiona ostatnio w pracy [11]. Analityczne rozwiązania uproszczonych modeli zostaną przedstawione również dla poszczególnych zagadnień opisywanych w monografii.

Celem opracowania jest przedstawienie istotnych elementów dynamiki lin i łańcuchów poprzez analizę istniejących i rozszerzonych modeli oraz wykonanych doświadczeń. W badaniach dynamiki lin i łańcuchów szeroko wykorzystane są modelowanie komputerowe oraz metody eksperymentalne z technikami rejestracji obrazu. W opracowaniu przedstawiono zastosowanie zaawansowanych metod numerycznych, które pozwalają między innymi na przeanalizowanie wyników wcześniejszych prac oraz rozwiązanie problemów, których nie udało się uprzednio wyjaśnić z przyczyn technicznych. Przedstawiono także zdjęcia spadającego końca łańcucha z wykorzystaniem ultraszybkiej kamery, które pozwalają na porównanie obliczeń teoretycznych z wynikami doświadczeń.

Monografię, poza wprowadzeniem i podsumowaniem, tworzy 6 rozdziałów, w których prezentowane są: równania ruchu, algorytmy je rozwiązujące, wyniki badań spadku łańcucha i sił działających na punkt jego zaczepienia oraz efekt strzału z bicza.

Rozdział 2 wprowadza opis, definicje i sformułowanie całego zagadnienia. Dla fizycznego opisu istotnym jest wybór modelu matematycznego opisującego dane zjawisko oraz odpowiednia metoda numeryczna (algorytm) umożliwiająca efektywne rozwiązanie zagadnienia. Z uwagi na fakt, że model matematyczny zastosowany przez Goriely'ego i McMillena do opisu bicza jest niewystarczający do zastosowania go w innych zagadnieniach dynamiki lin dlatego, po analizie modeli opisanych w literaturze, sformułowane zostały bardziej ogólne równania ruchu.

Rozdział 3 stanowi kluczową „techniczną" część monografii. Przedstawione są w nim wyniki wykonanych testów numerycznych i przeprowadzona jest analiza stabilności równań ruchu w zależności od parametrów występujących w równaniach. Efektywność rozwiązania

wymaga zastosowania odpowiednio dobranych metod całkowania numerycznego. Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów numerycznych do dalszych obliczeń zaproponowane zostały najbardziej efektywne algorytmy.

W kolejnych dwóch rozdziałach przedstawiona jest analiza ogólnego modelu spadku łańcucha w tym problemu spadku łańcucha złożonego (którego oba końce początkowo znajdują się na jednym poziomie). Podstawą i punktem wyjścia są prace Calkina i Marcha [12, 13] oraz Schagerla [14] opisujące doświadczenia i symulacje spadku łańcucha. W tej części opracowania (Rozdział 4 i 5) zostaną także przedstawione teorie wyjaśniające zjawisko spadku łańcucha oraz symulacje i szczegółowa analiza spadku łańcucha złożonego. Zostanie również obliczona prędkość, przyspieszenie i czasu spadku końca łańcucha, którego końce wiszą początkowo na jednym poziomie a odległość miedzy nimi wzrasta. W szczególności, zostanie przedstawiona analiza przypadku, gdy łańcuch jest początkowo całkowicie rozciągnięty poziomo. Otrzymane wyniki z symulacji numerycznych zostaną porównanie z danymi eksperymentalnymi. Zarejestrowane obrazy poklatkowe spadku realnego łańcucha posłuża do wyznaczenia wartości prędkości i przyspieszenia.

Rozdział 6 pokazuje kluczowe z praktycznego punktu widzenia zagadnienie sił działających na punkt zaczepienia łańcucha. Na początku podane zostanie rozwiązanie analityczne opisujące siły działające na podporę podczas spadku łańcucha złożonego. Następnie zostanie zbadany układ sił działających na podpory łańcucha w stanie równowagi i w chwili zwolnienia jednego końca łańcucha. Podobnie jak w części poprzedniej, obliczenia zostaną przeprowadzone również dla łańcuchów, których końce początkowo wiszą na tym samym poziomie, a odległość miedzy nimi rośnie. Wyniki symulacji zostaną porównane z wynikami eksperymentów wykonanych przez Géminarda i Vanela [15].

W rozdziale 7 przedstawiona będzie analiza efektu strzału z bicza [16]. Zostanie przeprowadzona symulacja strzału z bicza prostego oraz bicza australijskiego podobna do symulacji opisanej przez Goriely'ego i McMillena [1, 17]. Wyniki otrzymane w tych symulacjach będą porównane oraz zostanie wyjaśniona zasada powstawania dużych prędkości i przyspieszeń dla obu technik strzału z bicza.

Na zakończenie, w ostatnim rozdziale, przedstawione zostanie podsumowanie przeprowadzonych badań oraz aktualny stan wiedzy i perspektywy rozwoju tematyki.
Monografia obejmuje pracę doktorską Waldemara Tomaszewskiego [18] poszerzoną o część eksperymentalną (rozdział 4.2). Uzupełniono bibliografię i rysunki oraz poprawiono formę prezentacji poszczególnych rozdziałów w celu uzyskania bardziej spójnego przedstawienia tematyki dynamiki lin i łańcuchów. W zakończeniu wskazane zostaną aktualne kierunki i perspektywy rozwoju dziedziny.

# Rozdział 2
# Model matematyczny i równania ruchu lin i łańcuchów

Badanie dynamiki lin rozpoczniemy od zdefiniowania modelu matematycznego liny i wyprowadzenia równań opisujących jej ruch. Model matematyczny opisujący dynamikę lin wyznaczymy na podstawie opisu cech fizycznych liny oraz wszystkich istotnych czynników wpływających na jej dynamikę. Model matematyczny liny wraz z równaniami opisującymi jej ruch nazywać będziemy dalej *modelem liny* lub *modelem łańcucha* w zależności od omawianego zagadnienia i wprowadzenia lub nie dyskretyzacji obiektu.

Zdefiniowanie modelu liny zaczniemy od przeglądu literatury dotyczącej tematyki dynamiki lin i łańcuchów i oceny już istniejących modeli. Modele liny prezentowane w cytowanych przez nas pracach podzielić można na trzy grupy. Pierwszą z nich stanowią modele, w których ruch liny opisują równania wyznaczone z zasady zachowania energii dla układów o zmiennej masie. Do drugiej grupy należą modele ciągłe, zakładające, że lina może zostać potraktowana jako pręt sprężysty. Trzecia grupa modeli to modele dyskretne, opisujące różnego rodzaju łańcuchy. Poniżej przedstawimy skrótowy opis tych grup.

Najprostszy model liny, zastosowany został do wyjaśnienia zjawisk strzału z bicza i spadku łańcucha [16, 19]. W tym modelu rozważa się dynamikę liny, która w jednym ze swych końców zaczepiona jest w pewnym nieruchomym punkcie. W zależności od rozważanego problemu, lina spada pod wpływem działania siły grawitacji albo porusza się z zadaną prędkością początkową bez udziału pola grawitacyjnego. Podczas ruchu linę podzielić możemy na dwie części. Pierwsza z nich, to poruszający się fragment liny. Drugą częścią jest ten jej

fragment, który już się zatrzymał. Zakłada się, że długość elementu łączącego oba fragmenty liny jest nieskończenie mała. Modele analityczne są prostymi układami o zmiennej masie i do ich wyznaczenia stosuje się zasadę zachowania energii. Wykorzystując tę zasadę można w prosty sposób wyznaczyć funkcje opisujące ruch liny. Modele analityczne są modelami uproszczonymi i nie są wolne od osobliwości. Można je stosować do opisu ograniczonej liczby problemów i nie można ich zastosować do opisu dynamiki rzeczywistej liny. W niniejszej pracy modele analityczne stosować będziemy w celach porównawczych i do jakościowego opisu danego zjawiska.

Do drugiej grupy modeli należą modele pręta sprężystego. Opisują one linę jako nierozciągliwy pręt o kołowym przekroju, jednorodnej gęstości oraz sprężystości. Ruch pręta odbywa się na płaszczyźnie, położenie pręta określone jest przez kąt zawarty między styczną do osi centralnej pręta i jedną z osi układu współrzędnych. Modele tego typu spotykamy w pracach dotyczących problemów z różnych dziedzin. W pracach [1, 17] Goriely i McMillen zastosowali ten model do problemu strzału z bicza. W tych pracach podstawą konstrukcji modelu bicza był model pręta sprężystego opisany w artykule [20]. Nowy model stworzony przez Goriely'ego i McMillen'a zakładał możliwość zwężania się przekroju kołowego pręta. W tym modelu nie uwzględniono jednak istotnych czynników, mających wpływ na dynamikę liny, takich jak wpływ pola grawitacyjnego i tarcia wewnętrznego. Opis innego modelu liny jako pręta sprężystego znaleźć można także w pracach [21, 22] dotyczących zagadnień lotu żyłki wędkarskiej. W tym modelu autorzy założyli, że lina jest jednorodnym prętem sprężystym, na który działają siła ciężkości, naprężenia wewnętrzne oraz opór powietrza. W tych publikacjach szczególny nacisk położono na wierne odzwierciedlenie ruchu zarzucanej żyłki. Podobne modele sprężystego pręta znalazły zastosowanie do badania zagadnień z dziedziny sprężystości [23] oraz własności mechanicznych struktur *DNA* [24, 25, 26, 27, 28, 29]. W modelach dotyczących *DNA* dodatkowo wprowadza się siły skręcające pręt sprężysty i bada się jego stabilność.

Trzecią grupę stanowią modele dyskretne, w których lina reprezentowana jest jako łańcuch złożony z identycznych, połączonych ze sobą elementów o jednakowej długości i masie.

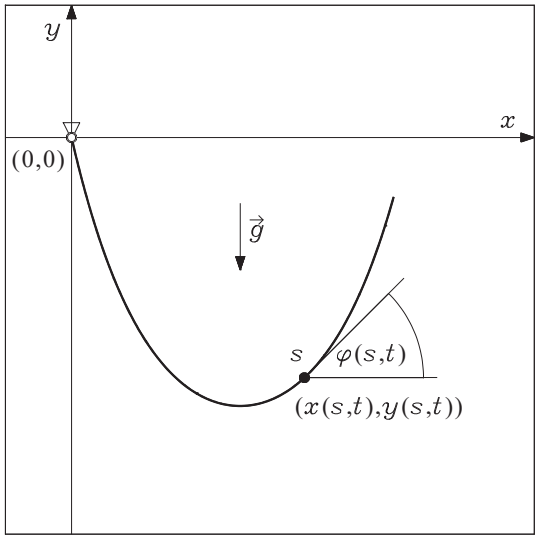
Położenie elementów w płaszczyźnie $xy$ określają kąty nachylenia segmentów do osi $x$ lub $y$. W tym modelu uwzględnić można również sprężystość oraz tłumienie występujące na złączach pomiędzy sąsiednimi elementami. Takie modele spotykamy w pracach związanych z wcześniej wspomnianymi zagadnieniami lotu żyłki wędkarskiej. Do prac najczęściej cytowanych w tej dziedzinie zaliczyć można [30, 31]. W pracy [31] będącej kontynuacją pracy [30] autor zastosował łańcuch składający się z cylindrycznych prętów umieszczony w polu grawitacyjnym z uwzględnieniem oporu powietrza. Symulacje numeryczne opisywane w obu pracach potwierdzają zgodność z rezultatami doświadczeń. Wadą tego modelu jest to, że nie uwzględniono w nim oddziaływań sprężystych między kolejnymi prętami, co jest istotne w przypadku badania dynamiki liny. Bardzo podobny model użyto również w pracy [14], w której autorzy badają spadający łańcuch i wykorzystują model realnego łańcucha składającego się z połączonych ogniw o różnym kształcie. Porównanie wyników symulacji z doświadczeniem wykazało tu również dużą zgodność. Model, w którym uwzględniono zarówno dyssypację, jak i sprężystość złącz, opisano w pracy [32]. Praca ta dotyczy problemu stabilnych położeń odwróconego ciągu wahadeł, który w literaturze nosi nazwę paradoksu *Indian Rope Trick* opisanego w pracy [33]. Model wykorzystany w tej pracy jest mniej realistyczny od wcześniej wspomnianych modeli dyskretnych ze względu na fakt, że elementami łańcucha są wahadła. Niemniej jednak, jak wykazały przeprowadzone doświadczenia, ten model z powodzeniem można zastosować do badania dynamiki lin i łańcuchów.

## 2.1. Model ciągły liny

### 2.1.1. Model matematyczny liny

W naszych rozważaniach przyjmujemy, że linę rozumieć będziemy jako cienką, nierozciągliwą nić o długości $L$ i masie $M$. Większość omawianych w tej pracy zagadnień dynamiki lin, bez straty ogólności, możemy sprowadzić do zagadnień dwuwymiarowych. Przyjmujemy więc, że ruch liny odbywać się będzie w płaszczyźnie $xy$. Jeden z końców liny zaczepiony jest w punkcie $O = (0,\ 0)$, a drugi koniec porusza się swobodnie pod wpływem pola grawitacyjnego

z przyspieszeniem $g$. Na linę oprócz sił grawitacyjnych działają siły związane ze sprężystością, dzięki której zgięcie liny wymagać będzie użycia momentu siły proporcjonalnego do kąta zgięcia liny. Sprężystość liny będzie proporcjonalna do kwadratu kąta zgięcia i określać ją będzie współczynnik sprężystości $k$. Minimum energii wynikającej ze sprężystości złącz lina osiąga zatem w stanie wyprostowanym. Aby uwzględnić dyssypację zakładamy, że jeśli kąt zgięcia jest zmienny w czasie, to na zgięciu między segmentami działać będzie moment siły proporcjonalny do prędkości kątowej zginania. W zgiętych częściach liny pojawi się tarcie wewnętrzne (lepkie), którego wielkość zależna będzie od współczynnika tłumienia $r$. Współczynniki sprężystości $k$ i tłumienia $r$ będą określać parametry liny lub łańcucha i będą zależeć głównie od materiału, z którego są wykonane. W przypadku współczynnika tłumienia, do wyznaczenia jego wartości zastosować można metody opisywane w pracy [34].




**Rysunek 2.1:** Model ciągły liny. Na linę zaczepioną w punkcie $O = (0,\ 0)$ działa siła grawitacji $\vec{g}$. Położenie liny w czasie opisane jest przez kąt $\varphi(s,t)$ nachylenia stycznej do krzywej opisującej linę w punkcie $s$. Kształt liny we współrzędnych kartezjańskich $(x(s,t),\ y(s,t))$ wyrazić można za pomocą kąta $\varphi(s,t)$.

Pierwszym krokiem przy wyznaczaniu równań ruchu jest wybór odpowiednich zmiennych, które w możliwie najprostszy sposób będą określać stan liny. Przyjmując, że długość łuku

krzywej opisującej linę reprezentowana jest przez zmienną $s$, kształt liny w chwili $t$ opisać można przez kąt $\varphi(s,t)$ nachylenia stycznej do krzywej opisującej linę w punkcie $s$. Opisany powyżej model matematyczny liny ilustruje rysunek 2.1. Kształt liny we współrzędnych kartezjańskich $(x,y)$ można zatem wyrazić za pomocą $\varphi(s,t)$ w następujący sposób:

$$x(s,t) = \int_0^s \cos(\varphi(\sigma,t))d\sigma, \tag{2.1}$$

$$y(s,t) = \int_0^s \sin(\varphi(\sigma,t))d\sigma. \tag{2.2}$$

Równania ruchu odpowiadające powyższemu modelowi wyliczyć można korzystając z równań Lagrange'a drugiego rodzaju [35]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \tag{2.3}$$

gdzie $\mathcal{L} = T - U$ jest *funkcją Lagrange'a* zdefiniowaną jako różnica energii kinetycznej $T$ i potencjalnej $U$, natomiast $\mathcal{R}$ reprezentuje niezachowawcze siły w układzie. Dla modelu liny energię kinetyczną, potencjalną oraz niezachowawcze siły zapisujemy następująco:

$$T(t) = \frac{1}{2}m\int_0^L \Big((\dot{x}(s,t))^2 + (\dot{y}(s,t))^2\Big)ds, \tag{2.4}$$

$$U(t) = \int_0^L \Big(mgy(s,t) + \frac{1}{2}k\left(\varphi'(s,t)\right)^2\Big)ds, \tag{2.5}$$

$$\mathcal{R}(t) = \frac{1}{2}r\int_0^L (\dot{\varphi}'(s,t))^2 ds, \tag{2.6}$$

gdzie $m = M/L$ określa masę jednostkową liny (masę przypadającą na jednostkę długości). Całkowita energia potencjalna układu $U(t)$ zależna jest od energii związanej z grawitacją oraz sprężystością liny. Siła niezachowawcza reprezentowana jest przez funkcję dyssypacyjną Rayleigha [35]. Wstawiając powyższe wartości do równań Lagrange'a (2.3) wyznaczyć możemy równania opisujące ruch liny. Konstrukcja modelu ciągłego szczegółowo opisana została w pracach Reekena [36, 37].

### 2.1.2. Krzywa łańcuchowa

W symulacji liny wymagana jest znajomość jej stanu początkowego (kształtu i prędkości). Przed przystąpieniem do wyznaczenia równań ruchu liny wyznaczymy równania krzywej, opisującej kształt łańcucha wiszącego w równowadze w polu grawitacyjnym o przyspieszeniu $g$. Krzywa, która przyjmuje kształt wiszącego łańcucha, nazywana jest *krzywą łańcuchową*. Krzywa ta będzie odgrywała dużą rolę w wielu problemach opisywanych w dalszej części pracy.

Znalezienie funkcji opisującej taką krzywą sięga czasów Bernoulli'ego (1696). Okazuje się, że w ogólnym przypadku rozwiązanie jest dobrze znane i przyjmuje postać $y(x) = \cosh(\alpha x)$, gdzie $\alpha$ jest dowolnym parametrem. W naszym przypadku rozważać będziemy zadanie nieco bardziej złożone. Łańcuch o długości $L$ i masie $M$ zaczepiony jest w początku układu współrzędnych $(0,\ 0)$ i punkcie $(x_0,\ y_0)$, dla którego spełniona jest nierówność $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \leqslant L$. Zakładamy ponadto, że masa rozłożona jest równomiernie wzdłuż łańcucha (gęstość masy wynosi $m = M/L$). Rysunek 2.2 przedstawia schemat tak określonej krzywej łańcuchowej. Wyznaczenie równań krzywej łańcuchowej uzyskać można stosując rachunek wariacyjny. Poszukiwać będziemy takiego kształtu łańcucha, dla którego energia potencjalna jest najmniejsza. Przyjmujemy, że w przypadku ciągłym położenie dowolnego punktu łańcucha o długości $L$, w prostokątnym układzie współrzędnych $xy$ opisują zmienne:

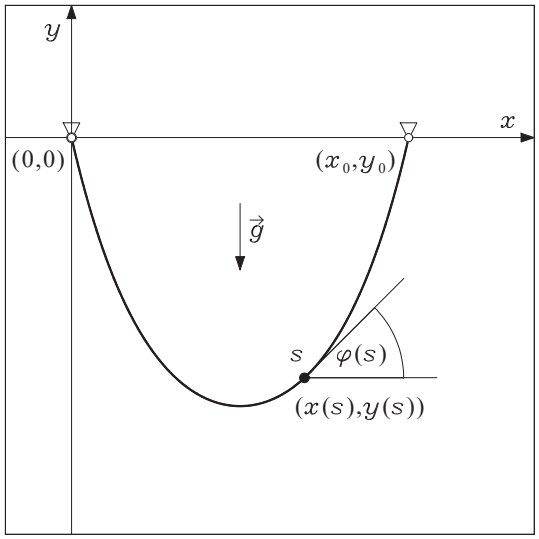
$$x(s) = \int_0^s \cos(\varphi(\sigma))\mathrm{d}\sigma, \quad y(s) = \int_0^s \sin(\varphi(\sigma))\mathrm{d}\sigma, \tag{2.7}$$

gdzie $s \in [0,\ L]$ określa długość krzywej, natomiast $\varphi(s)$ wyznacza kąt między styczną do krzywej w punkcie $s$ a osią $x$. Przyjmujemy, że łańcuch zawieszony jest w punktach $(0,\ 0)$ i $(x_0,\ y_0)$, więc spełnione są następujące zależności:

$$\int_0^L \cos(\varphi(s))\mathrm{d}s = x_0, \quad \int_0^L \sin(\varphi(s))\mathrm{d}s = y_0. \tag{2.8}$$

Powyższe równania są *równaniami więzów*. Energię potencjalną swobodnie wiszącego łańcucha wyznaczyć można w następujący sposób:

$$U = \int_0^L mgy(s)\mathrm{d}s = \int_0^L \int_0^s \sin(\varphi(\sigma))\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s. \tag{2.9}$$




**Rysunek 2.2:** Krzywa łańcuchowa. Na linę zaczepioną w punktach $(0,\ 0)$ i $(x_0,\ y_0)$ działa siła grawitacji $\vec{g}$. Położenie liny opisane jest przez kąt $\varphi(s)$ nachylenia stycznej do krzywej opisującej linę w punkcie $s$. Kształt liny we współrzędnych kartezjańskich $(x(s),\ y(s))$ wyrazić można za pomocą kąta $\varphi(s)$.

Dla uproszczenia obliczeń przyjmujemy, że $mg = 1$. Po scałkowaniu powyższego równania względem zmiennej $s$, zastosowaniu twierdzenia o całce iterowanej [38] i wprowadzeniu równań więzów otrzymujemy:

$$U = \int_0^L \Big((L - s + \lambda_2)\sin(\varphi(s)) + \lambda_1 \cos(\varphi(s))\Big)\mathrm{d}s, \tag{2.10}$$

gdzie współczynniki $\lambda_1$ i $\lambda_2$ nazywamy *mnożnikami Lagrange'a*. Równania Eulera–Lagrange'a dla wiszącego łańcucha przyjmują zatem następującą postać:

$$(L - s + \lambda_2)\cos(\varphi(s)) - \lambda_1 \sin(\varphi(s)) = 0. \tag{2.11}$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$\varphi(s) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{L - s + \lambda_2}{\lambda_1}\right). \tag{2.12}$$

Wprowadzając jawną postać funkcji $\varphi(s)$ do wzorów (2.8) otrzymujemy warunki, z których

wyznaczyć można wartości mnożników Lagrange'a odpowiadające parametrom $x_0$ i $y_0$:

$$\begin{aligned}\int_0^L \cos\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{L-s+\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)\mathrm{d}s &= x_0,\\ \int_0^L \sin\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{L-s+\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)\mathrm{d}s &= y_0.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Jeżeli przyjmiemy, że łańcuch o długości $L$ zaczepiony jest w punktach o współrzędnych $(0,\ 0)$ i $(x_0,\ 0)$, wówczas z warunków (2.13) wynikają następujące zależności:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \ln\left(\frac{L-\sqrt{4\lambda_1^2+L^2}}{-L-\sqrt{4\lambda_1^2+L^2}}\right) &= x_0,\\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}L.\end{aligned} \tag{2.14}$$

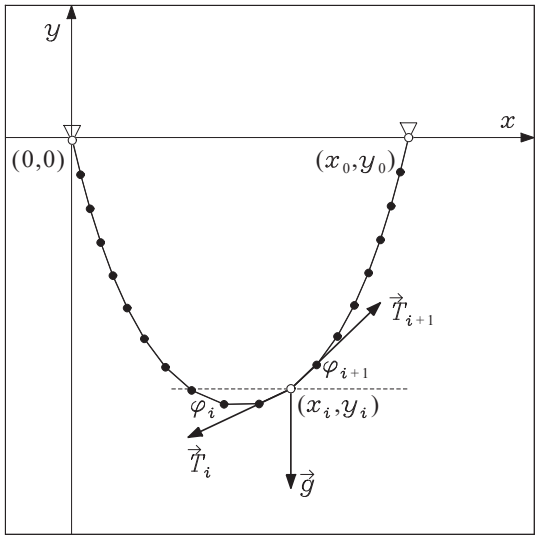
Parametr $x_0$ w dalszej części pracy nazywać będziemy *rozwarciem wiszącego łańcucha*. Przykładowo dla łańcucha o długości $L = 1\ m$, którego końce oddalone są od siebie o $x_0 = 0,5\ m$ otrzymujemy: $\lambda_1 \approx -0,11482\ m$, $\lambda_2 = -1/2\ m$.

### 2.1.3. Dyskretna krzywa łańcuchowa

Krzywa łańcuchowa omawiana w poprzednim paragrafie opisuje przypadek łańcucha zbudowanego z nieskończenie wielu segmentów. Jest to zatem model ciągły opisujący idealnie wiotką, nierozciągliwą linę, wiszącą w polu grawitacyjnym. Do opisu kształtu łańcucha wiszącego między punktami $(0,\ 0)$ i $(x_0,\ y_0)$ wymagany jest model dyskretny. Łańcuch o długości $L$ i masie $M$ przedstawić możemy jako dyskretny układ $n$ punktów o masach $m = M/n$, rozłożonych równomiernie wzdłuż całej długości. Tak rozłożone punkty formować będą dyskretną krzywą łańcuchową. Schemat tego układu przedstawia rysunek 2.3. Położenie punktów $(x_i,\ y_i)$ opisujących rozkład masy wzdłuż łańcucha wyrazić można przez kąty $\varphi_i$ pomiędzy prostą łączącą punkty $(x_i,\ y_i)$ i $(x_{i+1},\ y_{i+1})$ a osią $x$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{i} l\cos\varphi_j, \quad y_i = \sum_{j=1}^{i} l\sin\varphi_j, \tag{2.15}$$

gdzie $l = L/(n+1)$. Równania te odpowiadają równaniom (2.7) dla przypadku ciągłego. W przypadku dyskretnym równania więzów odpowiadające równaniom (2.8) definiujemy




**Rysunek 2.3:** Model dyskretnej krzywej łańcuchowej. Łańcuch o $n$ ogniwach zaczepiony jest w punktach $(0,\ 0)$ i $(x_0,\ y_0)$. Współrzędne $(x_i,\ y_i)$ określają położenie $i$-tej masy w płaszczyźnie $xy$ i można je przedstawić za pomocą kątów $\varphi_i$. Na każde $i$-te ogniwo działa siła grawitacji $\vec{g}$ a także naprężenia $\vec{T}_i$ i $\vec{T}_{i+1}$.

podobnie:

$$\sum_{i=1}^{n+1} l\cos\varphi_j = x_0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} l\sin\varphi_j = y_0. \tag{2.16}$$

Widzimy tutaj, że przy tak przyjętych oznaczeniach $x_{n+1} = x_0$ oraz $y_{n+1} = y_0$. Dla uproszczenia zakładamy, że końce łańcucha wiszą na tym samym poziomie, czyli $y_0 = 0$. Zastosowanie metody mnożników Lagrange'a do wyznaczenia kształtu dyskretnej krzywej łańcuchowej nie ma rozwiązania analitycznego i prowadzi do problemu rozwiązania nieliniowego układu równań. Te równania można rozwiązać numerycznie, ale już dla niewielkich $n > 5$ metody numeryczne są niestabilne i wymagają dobrego przybliżenia początkowego w celu uzyskania wymaganej zbieżności.

Wyznaczenie kształtu krzywej możemy jednak uzyskać w prostszy sposób analizując siły działające na $i$-ty punkt masy. W wyniku tego porównania możemy wyznaczyć proste wzory rekurencyjne. Widzimy, że na każdy $i$-ty punkt działa siła grawitacji oraz wewnętrzne siły

naprężające łańcuch $\vec{T}_i$ oraz $\vec{T}_{i+1}$. Układ tych sił przedstawiony został na rysunku 2.3. Siły te są w równowadze, więc możemy porównać ze sobą ich odpowiednie składowe:

$$\begin{aligned} |T_i|\cos\varphi_i - |T_{i+1}|\cos\varphi_{i+1} &= 0, \\ |T_i|\sin\varphi_i - |T_{i+1}|\sin\varphi_{i+1} + mg &= 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

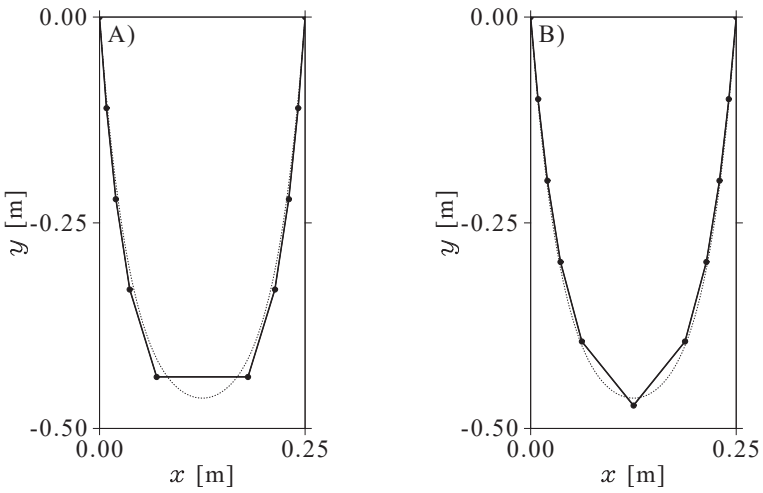
Z pierwszej zależności w równaniu (2.17) wynika, że wartość wyrażenia $|T_i|\cos\varphi_i$ jest stała dla dowolnego $i = 1...n$ i możemy ją oznaczyć przez $\lambda$. Zmienna ta spełniać będzie rolę taką jak mnożniki Lagrange'a zastosowane w poprzednim paragrafie. Dzieląc drugie z równań (2.17) przez $\lambda$ otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}\varphi_i - \operatorname{tg}\varphi_{i+1} + \frac{mg}{\lambda} = 0, \quad i = 1...n. \tag{2.18}$$

Z symetrii krzywej łańcuchowej wynika zależność $\operatorname{tg}\varphi_1 = -\operatorname{tg}\varphi_{n+1}$. Po wprowadzeniu tej zależności do równania (2.18), otrzymujemy następujący rezultat $\operatorname{tg}\varphi_1 = nmg/(2\lambda)$. Dla uproszczenia załóżmy, że $mg = 1$. Dalej, rozwiązując zależności w równaniu (2.18) otrzymujemy wzór rekurencyjny dla kątów:

$$\varphi_i = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{n - 2(i-1)}{2\lambda}\right), \quad i = 1...n{+}1. \tag{2.19}$$

Podobne obliczenia znaleźć można również w publikacjach [39, 40]. Do wyznaczenia pozostaje równanie określające wartość zmiennej $\lambda$. Jej wartość można tak dobrać, aby spełniony był warunek więzów dotyczący rozpiętości krzywej (2.16). Mamy więc jedno nieliniowe równanie z jedną niewiadomą, które rozwiązać można numerycznie. Po rozwiązaniu tego równania można już jawnie wyznaczyć wartości współrzędnych krzywej łańcuchowej korzystając ze wzorów (2.15). Dla przykładu, rysunek 2.4 przedstawia dwie krzywe łańcuchowe o rozstawie końców $x_0 = 0,25\ m$ dla $n = 8$ i $n = 9$. Na rysunku tym widzimy, że krzywa łańcuchowa ma dwa różne kształty w zależności od parzystości parametru $n$. Dla $n$ parzystych na środku łańcucha występuje poziomy element łączący dwie części. W przypadku $n$ nieparzystych, na środku nie występuje poziomy segment. Obliczenia wykazały, że dla rosnących $n$ model dyskretny jest zbieżny do modelu ciągłego. Dla $n > 100$ błąd względny współrzędnych krzywej dyskretnej w porównaniu do ciągłej jest rzędu $\mathcal{O}(10^{-4})$. W doświadczeniach i symulacjach

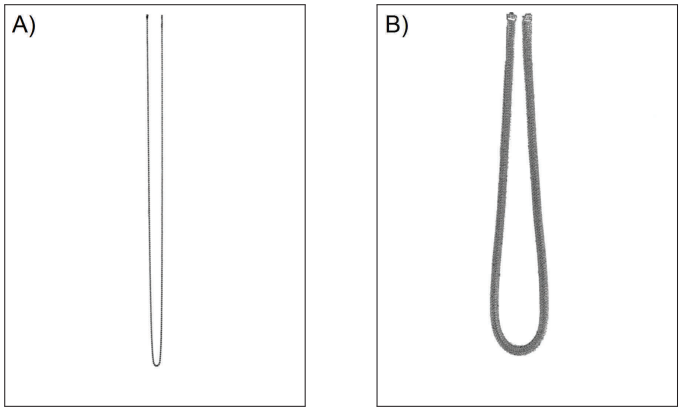



**Rysunek 2.4:** Kształt dyskretnej krzywej łańcuchowej. Rysunek przedstawia dyskretną krzywą łańcuchową o A) $n = 8$ ogniwach i B) $n = 9$ ogniwach, której długość wynosi $L = 1\ m$ i początkowa odległość między punktami zaczepienia wynosi $x_0 = 0,25\ m$. Krzywa ta reprezentowana jest przez punkty połączone ciągłą linią. Dla porównania, kształt ciągłej krzywej łańcuchowej o tej samej długości narysowany został linią przerywaną.

stosować będziemy łańcuchy o długości od 1 $m$ do 2 $m$ i składające się od 100 do 1000 ogniw. Wynika z tego, że początkowy kształt łańcucha wyznaczyć możemy również na podstawie ciągłej krzywej łańcuchowej.

Porównując krzywą łańcuchową wyznaczoną analityczne z kształtem wiszącego realnego łańcucha w większości przypadków widzimy dużą zbieżność. Różnice pojawiają się, gdy odległość między końcami jest mała, nie większa niż pięciokrotność długości ogniwa. Istotne są tu szczegóły budowy łańcucha i sposobu połączenia ogniw. Ze względu na brak możliwości swobodnego ułożenia ogniw względem siebie, kształt złożonego łańcucha przestaje być krzywą łańcuchową. Dla lin sytuacja również się komplikuje, gdy odległość między końcami jest mała $x_0 < 0,1L$. W przypadku złożonej liny należy uwzględnić siły sprężystości działające podczas silnego zginania włókien, z których zbudowana jest lina. Powoduje to pojawienie się kształtu znanego z teorii sprężystości [41, 42], czy też zagadnienia zginania pręta sprężystego

[43]. Na rysunku 2.5 porównano łańcuch i linę o długości $L = 1,54\ m$, których końce odległe są od siebie o $x_0 = 0,03\ m$.



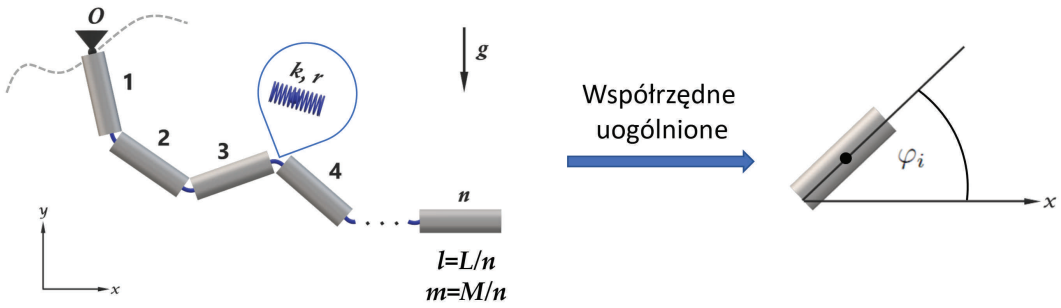

**Rysunek 2.5:** Porównanie kształtu realnego łańcucha i liny. Rysunek A) przedstawia zdjęcie łańcucha a B) zdjęcie liny wiszących swobodnie i znajdujących się w równowadze. Długość liny i łańcucha jest równa $L = 1,54\ m$, odległość między końcami wynosi $x_0 = 0,03\ m$. Zdjęcia zostały przetworzone cyfrowo w celu usunięcia tła.

Widzimy wyraźnie, że dla silnie zgiętej liny kształt liny różni się znacząco od kształtu silnie zgiętego łańcucha. Kształt takiej liny opisać można stosując wzory wykorzystywane w teorii prętów sprężystych [44].

## 2.2. Model dyskretny liny

Przeprowadzone przez nas doświadczenia numeryczne, a także analiza literatury tematu, wskazują, że do rozważanych przez nas zagadnień najodpowiedniejszy będzie model, w którym lina reprezentowana jest przez układ jednakowych elementów (ogniw) połączonych przegubowo. Dyskretny model liny reprezentuje więc łańcuch. Pojęcie liny i łańcucha w pracy tej występować będzie zatem wymiennie. O tym, czy równania ruchu reprezentują linę czy łańcuch, decydować będzie parametr dyskretyzacji oraz współczynniki sprężystości i dyssypacji.

O wyborze tego modelu zadecydowała jego prostota, możliwość modyfikacji i rozszerzenia o kolejne czynniki wpływające na jego dynamikę. Zgodnie z przyjętymi założeniami w części 2.1.1 model opracowany w niniejszej pracy uwzględniać będzie zarówno sprężystość jak i dyssypację złącz. Rozważać będziemy linę umieszczoną w polu grawitacyjnym, której jeden z końców jest nieruchomy lub porusza się po z góry określonej trajektorii, a drugi koniec pozostaje swobodny. Przyjmujemy, że ruch liny odbywać się będzie w płaszczyźnie $xy$. To założenie w znaczny sposób upraszcza model i odpowiadające mu równania ruchu. Rysunek 2.6 przedstawia schemat transformacji modelu liny z układu współrzędnych $xy$ do współrzędnych uogólnionych.




**Rysunek 2.6:** Lina o zadanej długości $L$ i masie $M$ reprezentowana jest przez układ połączonych ze sobą $n$ nierozciągliwych segmentów, połączonych za pomocą złącz sprężysto–tłumiących opisanych przez parametry $k$ i $r$. Przyjęto, że ruch liny odbywa się w płaszczyźnie $xy$, w polu grawitacyjnym z przyspieszeniem $g$. Położenie segmentów określają zmienne uogólnione: kąty $\varphi_i$, $i = 1...n$ pomiędzy ogniwami a osią $x$.

Model dyskretny definiujemy analogicznie do modelu ciągłego liny opisanego w paragrafie 2.1. W modelu dyskretnym przyjmujemy, że lina o całkowitej masie $M$ i długości $L$ składa się z $n$ nieskończenie cienkich, połączonych ze sobą przegubowo segmentów. Masa i długość każdego z segmentów wynosi odpowiednio $m = M/n$ i $l = L/n$. W modelu tym przyjmujemy, że segmenty są nierozciągliwe i nie poddają się zginaniu i skręcaniu. Sąsiednie segmenty połączone są za pomocą sprężysto–tłumiących przegubów. Schemat modelu przedstawia rysunek 2.6 . W przypadku braku sprężystości i dyssypacji powyższy model można traktować

jako model *łańcucha idealnego*. Pierwszy segment, na który nie działają siły sprężyste oraz dyssypacja, zaczepiony jest w punkcie $O = (x_0(t),\ y_0(t))$. Przy wyznaczeniu podstawowej wersji równań ruchu przyjmujemy, że $O = (0,\ 0)$. Dodanie możliwości ruchu pierwszego elementu jest stosunkowo proste i opisane zostanie w części 2.5.2.

## 2.3. Równania ruchu dyskretnego modelu liny

Podobnie jak autorzy prac [30, 31, 14, 32] zdecydowaliśmy, że linę w przestrzeni opisywać będziemy używając zmiennych kątowych określających kąt pomiędzy segmentem łańcucha a osią $x$.

Położenie pierwszego, zaczepionego w początku układu współrzędnych segmentu opisuje kąt $\varphi_1$. Położenie drugiego elementu, zaczepionego do końca segmentu pierwszego, możemy wyrazić wprowadzając drugą współrzędną $\varphi_2$. Przez analogię, położenie segmentu o indeksie $i$ wyrazić możemy przy pomocy współrzędnej $\varphi_i$, oznaczającej kąt nachylenia tego segmentu do osi $x$. Do jednoznacznego opisu położenia całej konformacji złożonej z $n$ prętów wystarczy więc $n$ współrzędnych $\varphi_i$, $i = 1...n$. Zmienne te nazywać będziemy *zmiennymi uogólnionymi*.

W dalszej analizie istotne będzie wyznaczenie środków masy segmentów. Od tego zależeć będzie sposób wyznaczenia energii układu oraz równań ruchu. Położenie środka masy $i$–tego segmentu w prostokątnym układzie opiszemy za pomocą współrzędnych uogólnionych $\varphi_i$, $i = 1...n$. Równania ruchu odpowiadające danemu modelowi matematycznemu wyznaczyć można korzystając z równań Lagrange'a drugiego rodzaju dla układu dyskretnego:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\varphi}_i} = 0, \qquad i = 1...n, \tag{2.20}$$

gdzie $\dot{()} = \partial/\partial t$, $\mathcal{L} = T - U$ jest *funkcją Lagrange'a* zdefiniowaną jako różnica energii kinetycznej $T$ i potencjalnej $U$. Funkcja $\mathcal{R}$ reprezentuje niezachowawcze siły w układzie. W ogólnym przypadku ruch każdego z segmentów rozpatrywać możemy jako złożenie ruchu postępowego i obrotowego. Każdy z segmentów posiada moment bezwładności $I_i$, $i = 1...n$, względem osi przechodzącej przez jego środek masy i prostopadłej do segmentu. Wartość

energii kinetycznej obliczyć możemy z następującej zależności:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(m\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2\right) + I_i\dot{\varphi}_i^2\right). \tag{2.21}$$

Na układ działają również siły grawitacji i sprężystości. Grawitacyjna energia potencjalna $i$–tego segmentu równa jest:

$$G_i = mgy_i, \tag{2.22}$$

gdzie $g$ oznacza przyspieszenie grawitacyjne. Przyjmujemy, że energia potencjalna sprężystego złącza między dwoma kolejnymi segmentami dana jest wzorem:

$$K_i = \frac{1}{2}k(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2 = \frac{1}{2}k(\Delta\phi_i)^2, \tag{2.23}$$

gdzie współczynnik $k$ określa sprężystość lub sztywność połączenia. Podobną definicję sprężystości liny zaproponowano w pracy [32]. Pierwszy segment zachowuje pełną swobodę obrotu. Zachowując przyjętą wyżej konwencję opisu sprężystego charakteru złącz, sytuacja ta równoważna jest zapisowi $\varphi_0 = \varphi_1$. Biorąc pod uwagę sprężystość złącz oraz grawitację, energia potencjalna całego układu wynosi:

$$U = \sum_{i=1}^{n}(G_i + K_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(mgy_i + \frac{1}{2}k(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2\right). \tag{2.24}$$

Tłumienie związane z obrotem segmentów reprezentowane jest przez *funkcję dyssypacyjną Rayleigh'a* [35]:

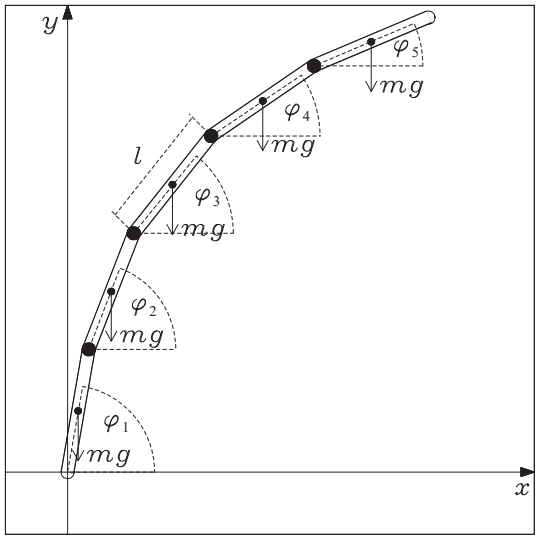
$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}r\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1}\right)^2, \tag{2.25}$$

gdzie $r$ jest współczynnikiem tłumienia. Przyjmujemy, że siła tłumiąca nie działa na pierwszy segment, więc $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_1$. W podobny sposób funkcja tłumiąca zdefiniowana została w pracach [14, 32].

Ostatecznie, równania ruchu dyskretnego modelu liny składającego się $n$ segmentów wyznaczyć można podstawiając wzory (2.21), (2.24) i (2.25) do równania (2.20). Końcowa postać równań ruchu zależeć będzie od budowy segmentów układu (ogniw łańcucha).

### 2.3.1. Równania ruchu układu prętów (Model A)

Najbardziej realistycznym modelem liny w klasie modeli dyskretnych jest układ $n$ jednorodnych prętów o równych długościach i masach, połączonych złączami sprężysto–tłumiącymi. Podobny model zaprezentowany został w pracy [31]. Schemat 2.7 przedstawia graficzną reprezentację tego modelu. W dalszej części pracy oznaczać będziemy go jako *Model A*.




**Rysunek 2.7:** Dyskretny model liny reprezentowany jako układ prętów. Lina reprezentowana jest jako łańcuch złożony z $n$ jednorodnych prętów o masie $m$ i długości $l$, których środek masy znajduje się w środku pręta. Położenie prętów opisują kąty $\varphi_i$, $i = 1...n$. Na pręty działa siła grawitacji $\vec{Q} = m\vec{g}$. Pręty połączone są złączami o określonej sprężystości i tłumieniu.

Jak łatwo zauważyć, środek ciężkości $i$–tego pręta w prostokątnym układzie współrzędnych określają następujące zależności:

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j=1}^{i-1} l\cos\varphi_j + \frac{1}{2}l\cos\varphi_i, \\ y_i &= \sum_{j=1}^{i-1} l\sin\varphi_j + \frac{1}{2}l\sin\varphi_i. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Każdy z segmentów posiada moment bezwładności $I_i = 1/12ml^2$, $i = 1...n$, względem osi

przechodzącej przez jego środek masy i prostopadłej do segmentu. Wstawiając te zależności do równań (2.21) i (2.24) energia kinetyczna i potencjalna układu prętów równa jest odpowiednio:

$$\begin{aligned} T &= ml^2 \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{3\,(n-i)+1}{6} \dot{\varphi}_i^2 + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2\,(n-j)+1}{2} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right), \\ U &= \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{2(n-i)+1)}{2} mgl \sin\left(\varphi_i\right) + \frac{1}{2} k \left(\varphi_i - \varphi_{i-1}\right)^2 \right). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Wstawiając powyższe wartości do wzoru (2.20) otrzymujemy równania ruchu układu prętów. Dla przykładu, poniżej podajemy równania ruchu dla $n = 1, 2, 3$ (dla uproszczenia zapisu wzorów przyjmujemy, że wartość $l$ i $m$ równa jest jedności).

**Równania ruchu dla $n = 1$:**

$$\frac{1}{3}\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} g \cos\left(\varphi_1\right) = 0. \tag{2.28}$$

**Równania ruchu dla $n = 2$:**

$$\begin{aligned} &\frac{4}{3}\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2 \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \\ &\qquad + \frac{3}{2} g \cos\left(\varphi_1\right) - k\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 0, \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\ddot{\varphi}_1 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \frac{1}{3}\ddot{\varphi}_2 - \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \\ &\qquad + \frac{1}{2} g \cos\left(\varphi_2\right) - k\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

**Równania ruchu dla $n = 3$:**

$$\begin{aligned}
&\frac{7}{3}\ddot{\varphi}_1 + \frac{3}{2}\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_3\cos(\varphi_1-\varphi_3)\\
&\quad+\frac{3}{2}\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_1-\varphi_2) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3^2\sin(\varphi_1-\varphi_3)\\
&\quad+\frac{5}{2}g\cos(\varphi_1) - k(\varphi_2-\varphi_1) = 0, \qquad (2.31)\\
&\frac{3}{2}\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \frac{4}{3}\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_3\cos(\varphi_2-\varphi_3)\\
&\quad-\frac{3}{2}\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_2) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3^2\sin(\varphi_2-\varphi_3)\\
&\quad+\frac{3}{2}g\cos(\varphi_2) - k(\varphi_1-2\varphi_2+\varphi_3) = 0, \qquad (2.32)\\
&\frac{1}{2}\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_3) + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_3) + \frac{1}{3}\ddot{\varphi}_3\\
&\quad-\frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_3) - \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2-\varphi_3)\\
&\quad+\frac{1}{2}g\cos(\varphi_3) - k(\varphi_2-\varphi_3) = 0. \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

W ogólnym przypadku, dla dowolnego $n > 0$, równania ruchu dla przyjętego modelu liny stanowić będzie układ równań różniczkowych postaci:

$$\begin{aligned}
ml^2\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}c_{i,j}\ddot{\varphi}_j = \;& - \; ml^2\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}s_{i,j}\dot{\varphi}_j^2 - mlgq_ic_i\\
& + \; k\sum_{j=1}^{n} e_{i,j}\varphi_j + r\sum_{j=1}^{n} d_{i,j}\dot{\varphi}_j, \quad i = 1...n, \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

gdzie $c_i = \cos(\varphi_i)$, $c_{i,j} = \cos(\varphi_i - \varphi_j)$, $s_{i,j} = \sin(\varphi_i - \varphi_j)$, współczynniki $e_{i,j}$, $d_{i,j}$ są elementami macierzy 2.36. Wartości współczynników $m_{i,j}$ oraz $q_i$ dla układu prętów przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned}
m_{i,j} &= \begin{cases} n - i + \frac{1}{3}, & i = j \\ n - \max(i,j) + \frac{1}{2}, & i \neq j \end{cases} \qquad (2.35)\\
q_i \quad &= n - i + \frac{1}{2}, \quad i = 1...n.
\end{aligned}$$

### 2.3.2. Postać macierzowa równań ruchu

Elementy macierzy $\mathbf{M} = [m_{i,j}]$ nazywać będziemy *współczynnikami bezwładności* układu. Pozostałe współczynniki $e_{i,j}$ i $d_{i,j}$ występujące w równaniu opisują złącza, są niezależne od rodzaju segmentu i dla dowolnego typu segmentów zawsze będą takie same. Funkcje opisujące energię sprężystości i dyssypację mają bardzo prostą postać, łatwą do zapisania w postaci macierzowej:

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.36}$$

Macierze $\mathbf{E} = [e_{i,j}]$ i $\mathbf{D} = [d_{i,j}]$ nazywać będziemy odpowiednio *macierzą współczynników sprężystości* i *macierzą współczynników dyssypacji*. Dla uproszczenia zapisu możemy teraz wprowadzić następującą notację macierzową:

$$ml^2\mathbf{C}\ddot{\varphi} = -ml^2\mathbf{S}\dot{\varphi}^2 - mlgG + k\mathbf{E}\varphi + r\mathbf{D}\dot{\varphi}, \tag{2.37}$$

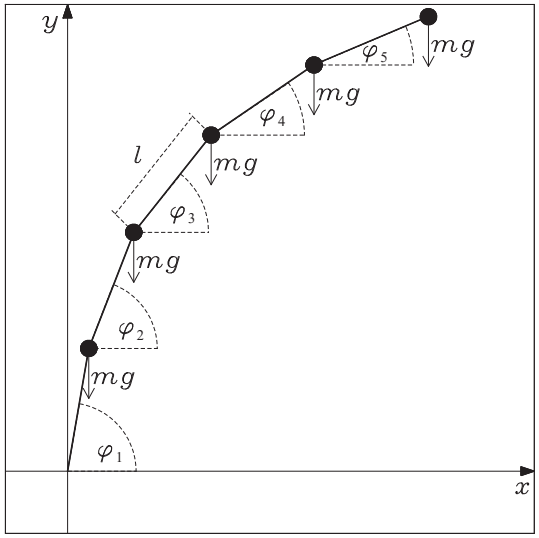
gdzie $\varphi = [\varphi_i]$, $\dot{\varphi} = [\dot{\varphi}_i]$, $\ddot{\varphi} = [\ddot{\varphi}_i]$ oraz $\dot{\varphi}^2 = [\dot{\varphi}_i^2]$. Współczynniki występujące w powyższym równaniu w zapisie macierzowym wynoszą $\mathbf{C} = [m_{i,j}c_{i,j}]$, $\mathbf{S} = [m_{i,j}s_{i,j}]$ oraz $\mathbf{G} = [q_i c_i]$.

### 2.3.3. Równania ruchu układu wahadeł (Model B)

Do najprostszych dyskretnych modeli liny lub łańcucha zaliczyć można układ składający się z połączonych wahadeł. Model ten będziemy skrótowo nazywać *Modelem B*. Podobny sposób dyskretyzacji modelu pojawił się w pracach [45, 30], w których wykorzystano go do symulacji lotu żyłki wędkarskiej. W tych pracach nie zwrócono jednak uwagi na specjalną postać równań ruchu dla tego układu, umożliwiającą zastosowanie efektywnych algorytmów numerycznych. W dalszej części opisane zostaną równaniu ruchu układu połączonych wahadeł oraz transformacja do postaci dogodnej do obliczeń numerycznych. W kolejnym rozdziale

przedstawimy odpowiednie testy numeryczne i wykażemy jego przewagę nad *Modelem A*. Wykażemy również, że wyniki symulacji dla obu modeli są bardzo zbliżone i dlatego *Model B* może być z powodzeniem stosowany do badania dynamiki lin i łańcuchów.

Wyznaczenie równań ruchu dla układu wahadeł zaczniemy od opisu współrzędnych segmentów w prostokątnym układzie współrzędnych. Pomocny do tego będzie rysunek 2.8. W celu maksymalnego uproszczenia modelu przyjmujemy, że wahadła są wahadłami ma-




**Rysunek 2.8:** Dyskretny model liny reprezentowany jako układ wahadeł. Lina reprezentowana jest jako łańcuch złożony z $n$ wahadeł matematycznych o masie $m$ i długości $l$. Położenie wahadeł opisują kąty $\varphi_i$, $i = 1...n$. Na wahadła działa siła grawitacji $\vec{Q} = m\vec{g}$. Wahadła połączone są złączami o określonej sprężystości i tłumieniu.

tematycznymi. Traktujemy zatem linę jako dyskretny układ punktowych mas rozłożonych równomiernie na całej długości. Środek ciężkości $i$–tego wahadła w prostokątnym układzie współrzędnych wyznaczyć można w następujący sposób:

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j=1}^{i} l \cos \varphi_j, \\ y_i &= \sum_{j=1}^{i} l \sin \varphi_j. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Gdybyśmy przyjęli, że segment jest wahadłem fizycznym, wówczas równania ruchu utraciłyby specjalne właściwości. Przy powyższych założeniach energia kinetyczna (2.21) i energia potencjalna (2.24) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} T &= ml^2 \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{n-i+1}{2} \dot{\varphi}_i^2 + \sum_{j=i+1}^{n} (n-j+1)\, \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right), \\ U &= \sum_{i=1}^{n} \left( (n-i+1) mgl \sin(\varphi_i) + \frac{1}{2} k \left(\varphi_i - \varphi_{i-1}\right)^2 \right). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Wstawiając powyższe wyrażenia do równań Lagrange'a, otrzymujemy równania ruchu w postaci (2.34) z następującymi parametrami:

$$\begin{aligned} m_{i,j} &= n - \max(i,j) + 1, \\ q_i \quad &= n - i + 1, \quad i = 1...n. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Przykładowo, równania ruch dla $n = 1, 2, 3$ przyjmują postać (dla uproszczenia zapisu wzorów przyjmujemy jednostkowe wartości dla $l$ i $m$):

**Równania ruchu dla $n = 1$:**

$$\ddot{\varphi}_1 + g \cos(\varphi_1) = 0. \tag{2.41}$$

**Równania ruchu dla $n = 2$:**

$$\begin{aligned} 2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ +2g \cos(\varphi_1) - k(\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \ddot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ +g \cos(\varphi_2) - k(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \end{aligned} \tag{2.43}$$

**Równania ruchu dla $n = 3$:**

$$\begin{aligned} 3\ddot{\varphi}_1 + 2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \\ +2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \\ +3g\cos(\varphi_1) - k(\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned} 2\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 2\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \\ -2\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \\ +2g\cos(\varphi_2) - k(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3) = 0, \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \ddot{\varphi}_3 \\ -\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \\ +g\cos(\varphi_3) - k(\varphi_2 - \varphi_3) = 0. \end{aligned} \tag{2.46}$$

### Transformacja równań ruchu

W tej części pokażemy, że zastosowanie innego, równoważnego zapisu matematycznego ma wpływ na efektywność obliczeń numerycznych. Podobną transformację dla przypadku równań opisujących sprężystą belkę znaleźć można w książce [46]. Dla równań ruchu układu wahadeł opisanych przez równania (2.34) o współczynnikach (2.40) istnieje możliwość transformacji do postaci umożliwiającej zastosowanie bardziej efektywnych algorytmów numerycznych. Algorytmy numeryczne całkowania równań ruchu wymagają częstego obliczania wartości przyspieszenia $\ddot{\varphi}$. Do jego wyznaczenia niezbędne jest rozwiązanie liniowego układu równań z $n$ niewiadomymi.

$$\ddot{\varphi} = \mathbf{C}^{-1}\left(-\mathbf{S}\dot{\varphi}^2 + \underbrace{\frac{1}{ml^2}(k\mathbf{E}\varphi + r\mathbf{D}\dot{\varphi} - mlgG)}_{v}\right) = \mathbf{C}^{-1}\left(v - \mathbf{S}\dot{\varphi}^2\right). \tag{2.47}$$

Dla układu wahadeł macierze współczynników $\mathbf{C}$ i $\mathbf{S}$ mają specjalną postać i zachodzą dla nich następujące związki:

$$\mathbf{C} + i\mathbf{S} = diag\left(e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_n}\right)\ \mathbf{M}\ \ diag\left(e^{-i\varphi_1}, \ldots, e^{-i\varphi_n}\right), \tag{2.48}$$

$$(\mathbf{C} + i\mathbf{S})^{-1} = diag\left(e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_n}\right)\ \mathbf{M}^{-1} diag\left(e^{-i\varphi_1}, \ldots, e^{-i\varphi_n}\right), \tag{2.49}$$

gdzie $i$ oznacza jednostkę urojoną, natomiast $\mathbf{M}^{-1} = [n_{i,j}]$ jest odwrotnością macierzy współczynników bezwładności $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-2 & n-2 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2.50}$$

Widzimy, że macierz $\mathbf{M}^{-1}$ jest macierzą trójprzekątniową, co ma bardzo duże znaczenie w obliczeniach numerycznych. Jeżeli przyjmiemy dodatkowo, że

$$(\mathbf{C} + i\mathbf{S})^{-1} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}, \tag{2.51}$$

to z własności (2.49) wynika, że $\mathbf{X} = [n_{i,j}c_{i,j}]$ i $\mathbf{Y} = [n_{i,j}s_{i,j}]$. Jeżeli $\mathbf{M}^{-1}$ posiada specjalną postać (diagonalną, trójdiagonalną, pasmową), to macierze $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ będą również posiadały taką postać. Z zależności (2.51) wynikają następujące związki:

$$\mathbf{CX} - \mathbf{SY} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{CY} - \mathbf{SX} = \mathbf{0}, \tag{2.52}$$

gdzie $\mathbf{I}$ oraz $\mathbf{0}$ oznaczają odpowiednio macierz jednostkową i macierz zerową. Dokonując prostych przekształceń, z powyższych związków otrzymujemy:

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{X} + \mathbf{YX}^{-1}\mathbf{Y}, \quad \mathbf{C}^{-1}\mathbf{S} = -\mathbf{YX}^{-1}. \tag{2.53}$$

Podstawiając te zależności do równań ruchu (2.47) otrzymujemy równania ruchu w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \mathbf{C}^{-1}\left(v - \mathbf{S}\dot{\varphi}^2\right) \\ &= \mathbf{X}v + \mathbf{YX}^{-1}\mathbf{Y}v + \mathbf{YX}^{-1}\dot{\varphi}^2 \\ &= \mathbf{X}v + \mathbf{Y}\underbrace{\mathbf{X}^{-1}\left(\mathbf{Y}v + \dot{\varphi}^2\right)}_{w} \\ &= \mathbf{X}v + \mathbf{Y}w = u(t, \varphi, \dot{\varphi}), \end{aligned} \tag{2.54}$$

gdzie $w = \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{Y}v + \dot{\varphi}^2)$. Stosując powyższy algorytm, do wyznaczenia wartości $\ddot{\varphi}$ wymagane jest rozwiązanie liniowego układu równań $\mathbf{X}w = \mathbf{Y}v + \dot{\varphi}^2$ ze względu na $w$. Redukcja kosztu wyznaczenia wartości przyspieszeń może zostać osiągnięta tylko w przypadku, gdy macierz $\mathbf{X}$ posiada specjalną postać. Jak wiemy, macierz $\mathbf{M}^{-1}$ jest macierzą trójdiagonalną, a więc i $\mathbf{X}$ ma tę samą strukturę. Układ równań z macierzą symetryczną, trójdiagonalną rozwiązać można stosując algorytmy (`TRIDIAG` [47]) o złożoności obliczeniowej $\mathcal{O}(n)$. W przypadku, gdy nie zastosujemy tej transformacji, obliczenie przyspieszeń wymagać będzie rozwiązania układ równań liniowych z macierzą $\mathbf{C}$ (pełną macierzą symetryczną i dodatniookreśloną). Do rozwiązania tego układu zastosować można algorytm Choleskiego (`CHOLDET/CHOLSOL` [47]), którego złożoność obliczeniowa wynosi $\mathcal{O}(n^3)$. Stosując transformację (2.54) do równań ruchu układu wahadeł uzyskać można znaczne zwiększenie wydajności obliczeń dla dużych układów. Ten model można zatem stosować w przypadku bardzo dużych $n$ lub dużych przedziałów całkowania, w których czas obliczeń odgrywa istotną rolę.

## 2.4. Równania ruchu liny w postaci bezwymiarowej

Równania ruchu (2.34) możemy zapisać w postaci bezwymiarowej. Przyjmujemy, że bezwymiarowa długość liny równa jest jedności, a bezwymiarowa prędkość liniowa jest równa jeden dla pewnej charakterystycznej prędkości rzeczywistej $c$. Dla przykładu, w zagadnieniu strzału z bicza wygodnie jest przyjąć, że $c$ oznaczać będzie prędkość dźwięku w powietrzu.

W celu wyznaczenia bezwymiarowej postaci równań ruchu dla zmiennej $s$ oznaczającej długość, $v$ oznaczającej prędkość oraz czasu $t$ wprowadzamy odpowiednio nowe zmienne bezwymiarowe $\hat{s}$, $\hat{v}$ oraz $\tau$:

$$\hat{s} = \frac{s}{L}, \quad \hat{v} = \frac{v}{c} = \frac{s}{tc}, \quad \hat{v} = \frac{\hat{s}}{\tau} = \frac{s}{L\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{c}{L}t. \tag{2.55}$$

Różniczkując równania ruchu względem bezwymiarowej zmiennej $\tau$ określającej czas oraz dokonując wszystkich niezbędnych podstawień i uproszczeń otrzymujemy równania ruchu dla

dyskretnego modelu liny w postaci bezwymiarowej:

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} c_{i,j} \ddot{\varphi}_j = -\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} s_{i,j} \dot{\varphi}_j^2 - n\gamma q_i c_i + n^3 \kappa \sum_{j=1}^{n} e_{i,j} \varphi_j + n^3 \rho \sum_{j=1}^{n} d_{i,j} \dot{\varphi}_j, \quad i = 1...n,$$

z następującymi nowymi zmiennymi i parametrami bezwymiarowymi:

$$\tau = \frac{c}{L} t, \quad \rho = \frac{r}{MLc}, \quad \kappa = \frac{k}{Mc^2}, \quad \gamma = \frac{Lg}{c^2}. \tag{2.56}$$

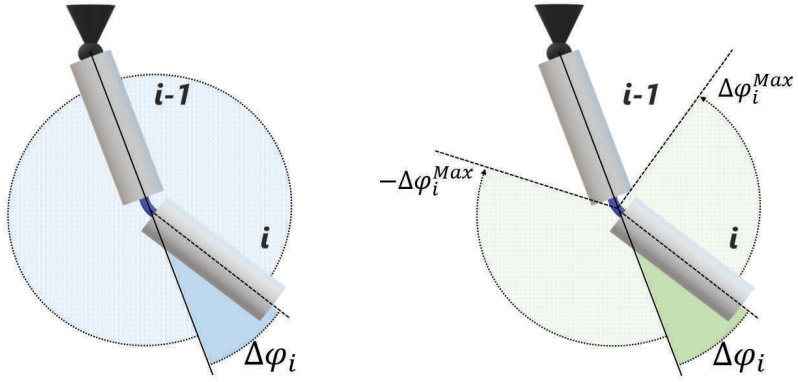
W powyższych równaniach $\dot{()}$ oznacza $\partial()/\partial\tau$. Bezwymiarowe równania ruchu w postaci macierzowej przyjmują następującą postać:

$$\mathbf{C}\ddot{\varphi} = -\mathbf{S}\dot{\varphi}^2 + n^3\kappa\mathbf{E}\varphi + n^3\rho\mathbf{D}\dot{\varphi} - n\gamma\mathbf{G}. \tag{2.57}$$

## 2.5. Modyfikacje równań ruchu liny

### 2.5.1. Sprężystość złącz między segmentami

W powyższych rozważaniach przyjęliśmy stosunkowo proste i powszechnie stosowane modele sprężystości i dyssypacji. W dalszej części pracy standardowo używać będziemy właśnie tych modeli. W szczególnych przypadkach, gdy sąsiednie segmenty obracają się względem siebie nie uwzględniając objętości wykluczonej wykorzystywać będziemy inną funkcję sprężystości, będącą rozszerzeniem opisywanej wcześniej funkcji. Problem ten rozwiązać można zastępując potencjał kwadratowy opisujący energię sprężystości złącza, przez potencjał, który uniemożliwiał dalszy obrót, gdy sąsiednie ogniwa zbliżały się do krytycznego położeniu. Nowy model oparty jest na założeniu, że energia potencjalna sprężystości jest nieskończenie duża w przypadku, gdy dwa dowolne segmenty znajdują się w pewnym skrajnym położeniu względem siebie. W przypadku łańcucha zbudowanego z cienkich prętów skrajne położenie występuje wtedy, gdy dwa pręty pokrywają się, tj. $|\Delta\varphi_i| = \pi$. W ogólności maksymalna dopuszczalna wartość $|\Delta\varphi_i|$ może być dowolnie przyjętym kątem między segmentami, nie większym niż $\pi$. Porównanie modeli opisujących sprężystość złącz przedstawia schemat 2.9.



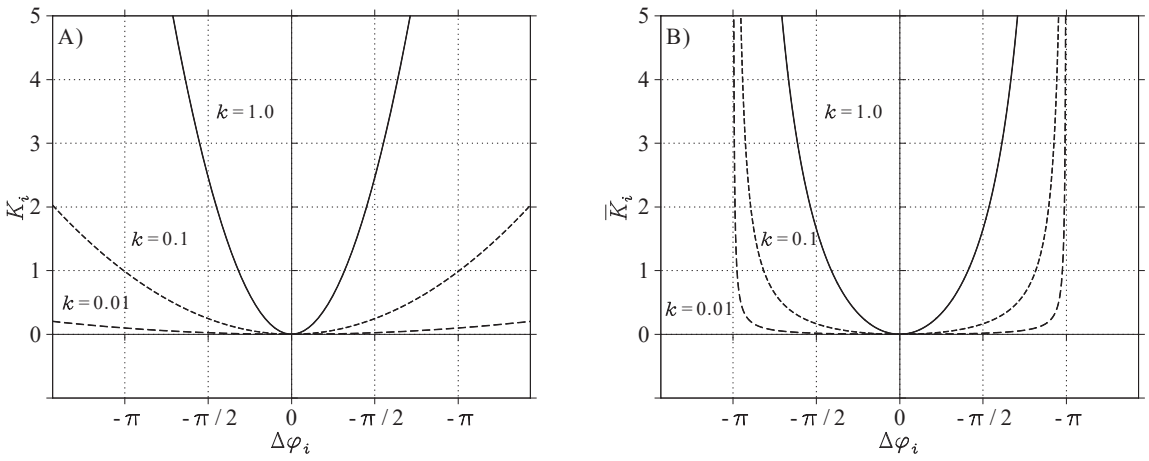

**Rysunek 2.9:** Porównanie modeli sprężystości złącz. Rysunek po lewej stronie przedstawia układ sąsiednich segmentów w przypadku, gdy energia sprężystości złącz opisana jest przez potencjał kwadratowy. Segmenty mogą obracać się względem siebie. Rysunek po prawej przedstawia model sąsiednich ogniw, gdy energia opisana jest przez potencjał uniemożliwiający obrót ogniw względem siebie. $\Delta\varphi_i^{Max}$ jest maksymalnym możliwym kątem między sąsiednimi segmentami.

Funkcję opisującą energię sprężystości złącz, posiadającą wyżej wymienione właściwości zdefiniować można w następujący sposób:

$$\overline{K}_i = k\alpha^2 \left( \frac{1}{\cos(\Delta\varphi_i/\alpha)} - 1 \right) = \frac{1}{2} k(\Delta\varphi_i)^2 + \frac{5}{24\alpha^2} k(\Delta\varphi_i)^4 + \mathcal{O}((\Delta\varphi_i)^6). \tag{2.58}$$

Funkcja opisana przez 2.58 została tak dobrana by w pierwszym przybliżeniu była równa funkcji sprężystości (2.23). Parametr $\alpha$ decyduje o tym, jakie jest maksymalne dozwolone położenie dwóch sąsiednich prętów. W przypadku, gdy zastosujemy powyższy model sprężystości, wówczas $\overline{K}_i \to \infty$ dla $|\Delta\varphi_i^{Max}| = \alpha\pi/2$. Dla $\alpha = 1$ maksymalnym położeniem dwóch segmentów jest $|\Delta\varphi_i^{Max}| = \pi/2$, a dla $\alpha = 2$ jest to $|\Delta\varphi_i^{Max}| = \pi$. W zastosowaniach sensowne będzie używanie tego modelu z parametrem $\alpha \in [1/2,\ 2]$. Tak zdefiniowany model nazywać będziemy *rozszerzonym modelem sprężystości*.

Rysunek 2.9 przedstawia porównanie funkcji opisanych przez (2.23) i (2.58), reprezentujących sprężystość złącz między segmentami w przypadku, gdy $\alpha = 2$ i $k = 1,\ 1/10,\ 1/100\ Nm$.




**Rysunek 2.10:** Funkcje opisujące sprężystość złącz. Rysunek A) przedstawia wykresy funkcji sprężystości $K_i$ dla współczynników $k = 0,01$; $k = 0,1$; $k = 1\ Nm$. Na rysunku B) przedstawione zostały analogiczne wykresy dla funkcji $\overline{K}_i$ opisującej sprężystość złącza wyznaczonej na podstawie minimalizacji energii zginania prętów (przyjęliśmy, że maksymalna energia zgięcia występuje dla prętów ustawionych pod kątem $\pi$).

Wstawiając rozszerzoną funkcję sprężystości do równań (2.24) i wyznaczając równania ruchu z wzorów Lagrange'a (2.20) otrzymamy równania ruchu w postaci podobnej do (2.56) za wyjątkiem członów związanych ze sprężystością. Równania ruchu w postaci bezwymiarowej przyjmą wtedy postać:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}c_{i,j}\ddot{\varphi}_j = &-\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}s_{i,j}\dot{\varphi}_j^2 - n\gamma q_i c_i + n^3\rho\sum_{j=1}^{n} d_{i,j}\dot{\varphi}_j \\ &+ n^3\kappa\alpha\frac{\sin((\varphi_{i+1}-\varphi_i)/\alpha)}{\cos((\varphi_{i+1}-\varphi_i)/\alpha)^2} \\ &- n^3\kappa\alpha\frac{\sin((\varphi_i-\varphi_{i-1})/\alpha)}{\cos((\varphi_i-\varphi_{i-1})/\alpha)^2}, \quad i = 1...n.\end{aligned}$$

Przedstawiona powyżej definicja funkcji opisującej sprężystość między złączami ma sens fizyczny. W pracy [48] autorzy uzyskali równania odpowiadające funkcji $\overline{K}_i$, gdy maksymalny kąt zgięcia między sąsiednimi segmentami wynosił $\pi$, minimalizując energię zgięcia dwóch kolejnych segmentów.

### 2.5.2. Ruch punktu zaczepienia liny

Innym istotnym rozszerzeniem modelu liny jest dodanie możliwości ruchu punktu zaczepienia liny. Taki model zastosowaliśmy w pracy [49]. Podobny model opisany został w pracy [50]. Pierwszy segment, na który nie działają siły sprężyste oraz dyssypacja, zaczepiony jest do punktu, którego trajektoria w czasie określona jest przez $(x_0(t),\ y_0(t))$. Wówczas równania opisujące położenie środka ciężkości $(x_i(t),\ y_i(t))$ przyjmą następującą postać:

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + \sum_{j=1}^{i} l\cos\varphi_j, \\ y_i &= y_0 + \sum_{j=1}^{i} l\sin\varphi_j, \end{aligned} \tag{2.59}$$

co wpływa na postać energii kinetycznej i potencjalnej. Po uwzględnieniu ruchu punktu zaczepienia, równania ruchu liny w postaci bezwymiarowej przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}c_{i,j}\ddot{\varphi}_j = &-\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}s_{i,j}\dot{\varphi}_j^2 - n\gamma q_i c_i\dot{\varphi}_j \\ &+ n^3\kappa\sum_{j=1}^{n} e_{i,j}\varphi_j + n^3\rho\sum_{j=1}^{n} d_{i,j}\dot{\varphi}_j \\ &+ n\ddot{\xi}_0 a_i s_i - n\ddot{\psi}_0 b_i c_i, \quad i = 1...n, \end{aligned} \tag{2.60}$$

gdzie $s_i = \sin(\varphi_j)$, $a_i = b_i = n - i + 1$, $\ddot{\xi}_0 = L\ddot{x}_0/c^2$, $\ddot{\psi}_0 = L\ddot{y}_0/c^2$ dla $i = 1...n$. Powyższe równanie podać możemy w postaci macierzowej:

$$\mathbf{C}\ddot{\varphi} = -\mathbf{S}\dot{\varphi}^2 + n^3\kappa\mathbf{E}\varphi + n^3\rho\mathbf{D}\dot{\varphi} - n\gamma\mathbf{Q} + n\ddot{\xi}_0\mathbf{A} - n\ddot{\psi}_0\mathbf{B}, \tag{2.61}$$

gdzie nowe współczynniki oznaczają: $\mathbf{A} = [a_i s_i]$ oraz $\mathbf{B} = [b_i c_i]$.

## 2.6. Podsumowanie

W tej części wyprowadziliśmy równania ruchu dynamiki lin i łańcuchów. Równania opisują układ połączonych segmentów. Przyjmując, że segmenty są prętami, których środek masy znajduje się w środku pręta, sformowaliśmy postać równań, które opisują ruch realnego

łańcucha lub liny. W drugim przypadku, jako segment przyjęliśmy wahadło matematyczne i otrzymaliśmy równania, dla których zastosować można bardzo efektywne algorytmy numeryczne. Modele te można dodatkowo w prosty sposób rozszerzyć przez dodanie lub modyfikację poszczególnych członów. W szczególności, w literaturze pojawiły się prace, w których z powodzeniem zastosowano i rozwinięto wyprowadzone w tej części równania ruchu. Dla przykładu, w pracach [50, 51, 52] autorzy wprowadzili periodyczny ruch pierwszego elementu, możliwość rozciągania liny oraz modyfikację sprężystości złącz.

Dodatkowo na początku rozdziału przedstawiliśmy sposób generacji krzywej łańcuchowej i dyskretnej krzywej łańcuchowej z dodatkowymi więzami.

# Rozdział 3
# Całkowanie numeryczne równań ruchu

Znalezienie analitycznego rozwiązania równań ruchu otrzymanych w poprzednim rozdziale nie jest możliwe. Będziemy więc poszukiwać rozwiązania równań ruchu stosując algorytmy numeryczne. Dobór odpowiedniej metody numerycznej oraz opracowanie efektywnego algorytmu można porównać z budową aparatury doświadczalnej, której celem jest rejestracja zjawiska i dokonanie odpowiednich pomiarów. Budowa aparatury doświadczalnej jest istotną częścią każdej pracy naukowej. W związku z powyższym rozdział ten poświęcimy na wybór odpowiedniej metody numerycznej i opis algorytmu numerycznego będącego odpowiednikiem aparatury badawczej.

## 3.1. Zagadnienie początkowe pierwszego rzędu

Równania ruchu otrzymane w poprzednim rozdziale należą do klasy równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu:

$$\ddot{\varphi} = u(t, \varphi, \dot{\varphi}), \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0. \tag{3.1}$$

Najbardziej oczywiste wydaje się zatem zastosowanie metod całkowania numerycznego dla zagadnień początkowych drugiego rzędu. Jednym z pierwszych, który zaproponował metody tego typu był Nyström [53]. Obecnie metody numeryczne rozwiązywania zagadnień drugiego rzędu nazywamy zwyczajowo metodami *metodami Nyströma* (np. metody Rungego-Kutty dla zagadnień drugiego rzędu nazywamy metodami *Rungego-Kutty-Nyströma*). Efektywność metod Nyströma widoczna jest tylko w przypadku specjalnych zagadnień drugiego rzędu,

gdy prawa strona rozważanego problemu nie zależy od $\dot{\varphi}$, tj. $\ddot{\varphi} = u(t,\ \varphi)$. W ogólnym przypadku takim jak (3.1) zastosowanie metody Nyströma wymaga dodatkowych nakładów pracy na przybliżenie wartości $\dot{\varphi}$ występującej po prawej stronie równania. W literaturze znaleźć można tylko nieliczne prace dotyczące metod Nyströma dla przypadku ogólnego. Są to między innymi prace [54, 55]. Algorytmy tego typu nie doczekały się jednak implementacji, która byłaby dziś powszechnie stosowana.

Zagadnienia (3.1) rozwiązać można dokonując transformacji równań różniczkowych drugiego rzędu do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu i zastosowanie metod dla tego typu zagadnień. O wyborze tego podejścia w dużej mierze zadecydowało bogactwo literatury dotyczącej teorii metod numerycznego całkowania zagadnień początkowych pierwszego rzędu oraz szeroki wachlarz dobrze udokumentowanych pakietów obliczeniowych.

Transformację równań ruchu przeprowadzimy wprowadzając nową zmienną $\vartheta_i = \dot{\varphi}_i$. W wyniku tej transformacji otrzymujemy układ równań różniczkowych pierwszego rzędu o rozmiarze $2n$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix}}_{\dot{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vartheta \\ u(t,\varphi,\vartheta) \end{bmatrix}}_{f(t,y)}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi(\mathrm{t}_0) \\ \vartheta(\mathrm{t}_0) \end{bmatrix}}_{y(t_0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \vartheta_0 \end{bmatrix}}_{y_0}. \tag{3.2}$$

Stosując standardową konwencję oznaczeń przyjmujemy, że powyższe równanie należy do klasy zagadnień początkowych pierwszego rzędu:

$$\dot{y} = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{3.3}$$

## 3.2. Kryteria wyboru metody numerycznej

Przybliżone rozwiązywanie zagadnień początkowych postaci (3.3) jest zagadnieniem sięgającym czasów Leibniza i Eulera. Gwałtowny rozwój metod numerycznych całkowania równań różniczkowych zwyczajnych rozpoczął się w połowie poprzedniego stulecia i związany był

z rozwojem nauki i techniki oraz ciągle rosnącą mocą obliczeniową komputerów. Do najbardziej obszernych i kompleksowych prac nad metodami numerycznymi dla równań różniczkowych zwyczajnych zaliczyć można monografie opracowane przez Hairera, Nørsetta i Wannera [56, 46]. Pierwsza z prac dotyczy metod jawnych, druga metod niejawnych i zagadnień źle uwarunkowanych. W tych pracach opisano najnowsze osiągnięcia w zakresie teorii, konstrukcji jak i implementacji różnych klas metod numerycznych rozwiązywania równań różniczkowych.

Przy wyborze najlepszej metody dla danego zagadnienia pod uwagę będziemy brali przede wszystkim efektywność metody, czyli osiągnięcie jak najlepszej precyzji obliczeń przy możliwie najmniejszym koszcie obliczeń. Zdefiniujemy zatem kryteria, które wpływają na efektywność danej metody numerycznej.

### 3.2.1. Rząd metody

W ogólności, metoda numerycznego całkowania równań różniczkowych polega na wykonaniu jednego kroku obliczeń. Cały proces numerycznego całkowania polega na wykonaniu wielu kroków numerycznego całkowania, aż do osiągnięcia końca przedziału całkowania. Do najważniejszych cech metody numerycznej zaliczyć można zbieżność. Z pojęciem tym, w sposób istotny, związane jest pojęcie *rzędu zbieżności* metody.

**Definicja 1** *Metoda numeryczna jest rzędu* $\boldsymbol{p}$*, jeżeli dla każdego dostatecznie gładkiego zagadnienia (3.3) istnieje taka stała* $\xi$*, że spełniona jest następująca zależność*

$$\|y(t_i + h) - y_{i+1}\| \leqslant \xi h^{p+1}, \tag{3.4}$$

*gdzie* $y_{i+1}$ *jest przybliżoną wartością rozwiązania dokładnego w punkcie* $t_{i+1} = t_i + h$*, otrzymaną za pomocą metody numerycznej z krokiem całkowania o długości* $h$*.*

Z tej definicji wynika, że wzrost rzędu metody umożliwia całkowanie z większym krokiem całkowania przy zapewnieniu żądanej zbieżności. Do przeprowadzenia obliczeń o dużej precyzji pożądane jest aby metoda była możliwie wysokiego rzędu.

### 3.2.2. Stabilność metody

Inną istotną własnością metody numerycznej jest jej stabilność. Na początku lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku zauważono, że powszechnie stosowane metody jawne są bardzo nieefektywne dla pewnych typów zagadnień. Rozwiązanie dla tych zagadnień było wolnozbieżne i nic nie wskazywało na potrzebę drastycznego zmniejszenia kroku całkowania podczas obliczeń. Przeprowadzono analizę, która doprowadziła do znalezienie przyczyny tego zjawiska. Okazało się, że powodem restrykcji dotyczącej kroku całkowania były wymogi co do stabilności stosowanych metod numerycznych. Obecnie wiadomo, że metody jawne, ze względu na ograniczoną stabilność, nie są efektywne w przypadku zastosowania do zagadnień źle uwarunkowanych, nazywanych powszechnie *zagadnieniami sztywnymi* (*stiff*).

W literaturze rozważane są różne rodzaje stabilności metod numerycznych całkowania równań różniczkowych. Do najważniejszych z nich zaliczamy stabilność liniową. Analiza stabilności dla zagadnień nieliniowych wciąż jest otwartym problemem. W takim przypadku dokonuje się linearyzacji danego zagadnienia i bada tak otrzymany liniowy układ równań różniczkowych. Do analizy stabilności metod przyjmuje się następujące zagadnienie testowe:

$$\dot{y}(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.5}$$

którego rozwiązaniem jest funkcja

$$y(t) = e^{\lambda t}. \tag{3.6}$$

Z punktu widzenia stabilności, najbardziej istotny jest przypadek, gdy $\lambda < 0$. Warunki stabilności definiuje się dla danej rodziny metod. Wprowadza się pojęcie *obszaru stabilności* metody, oznaczonego przez $\mathcal{S}$. Gdy metoda nie ma żadnych restrykcji stabilności przy całkowaniu zagadnienia (3.5), wówczas metodę nazywamy *absolutnie stabilną* ($A$-stabilną). Bardziej formalnie cecha ta opisana jest w poniższej definicji:

**Definicja 2** *Metodę numeryczną całkowania zagadnienia początkowego (3.5) nazywamy A-stabilną, jeżeli jej obszar stabilności zawiera lewą półpłaszczyznę płaszczyzny zespolonej, tj. ($\mathcal{S} \supset \mathbb{C}^-$).*

Okazuje się jednak, że w przypadku zagadnień bardzo sztywnych ($\lambda \ll 0$) własność $A$-stabilności jest niewystarczająca. W zależności od klasy metody wprowadzono dodatkowe typy stabilności. Na przykład dla metod jednokrokowych wprowadza się pojęcie metod $L$-stabilnych, a dla wielokrokowych sztywnie stabilnych.

W przypadku ogólnego zagadnienia nieliniowego postaci (3.3) wprowadzone zostało pojęcie $B$-stabilności. Precyzyjne określenie tego pojęcia jest bardzo złożone. Korzystając z wcześniej zdefiniowanych pojęć możemy jednak określić cechy metod $B$-stabilnych. Metodę nazywamy $B$-stabilną, jeżeli jest absolutnie stabilna dla zagadnień nieliniowych. Zatem ta własność jest odpowiednikiem $A$-stabilności dla problemów liniowych. Szczegóły dotyczące teorii stabilności dla metod całkowania numerycznego zawiera wspomniana wcześniej praca [46].

Stabilność metody będzie ważną cechą braną pod uwagę przy wyborze metody obliczeniowej, gdyż może istotnie wypłynąć na efektywność obliczeń.

## 3.3. Pakiety obliczeniowe

Metody numeryczne do zagadnień początkowych podzielić możemy na jawne i niejawne. Ten podział dotyczy sposobu definicji metody. Metody jawne przy wykonaniu kroku obliczeń, dla $y_i \approx y(t_{i-1} + h)$, wymagają tylko znajomości wartości obliczonej w poprzednim kroku. Algorytmy tego typy są proste w implementacji, jednak w ogólnym przypadku nie są stabilne. Jeżeli do wyznaczenia $y_i$ wymagana jest również znajomość $y(t_i)$, wówczas mamy do czynienia z metodą niejawną. W tym przypadku implementacja metody jest złożona, gdyż wymaga rozwiązania nieliniowego układu równań. Mimo to teoria tych metod bardzo się rozwinęła, gdyż w tej klasie metod można znaleźć metody stabilne.

Zarówno metody jawne jak i niejawne doczekały się efektywnych implementacji w postaci programu komputerowego.

### 3.3.1. Przegląd algorytmów

Do prac [56, 46] dołączone zostały kody źródłowe procedur dla wybranych algorytmów, bazujących głównie na metodach jednokrokowych Rungego–Kutty lub schematach ekstrapolacyjnych[1]. Kolekcję metod wybranych do testów wzbogaciliśmy o przedstawicieli metod wielokrokowych opracowanych przez Iavernaro i Mazzia[2] [57] oraz Cash i Considine[3] [58]. Wszystkie procedury zaimplementowane zostały w języku `Fortran 77` według podobnych zasad i standardów programistycznych. Z tego względu, są one doskonałym materiałem testowym. Tekst źródłowy procedur dostępny jest na stronach internetowych autorów. Do testów wybraliśmy kilka metod opartych na różnorodnych metodach numerycznych. Poniżej prezentujemy krótki opis użytych przez nas programów:

`DOPRI8` - Algorytm numerycznego całkowania zagadnień początkowych pierwszego rzędu. Algorytm ten bazuje na jawnej metodzie Rungego–Kutty (*Dopri*8(7)), rzędu ósmego z automatycznym doborem kroku całkowania.

`ODEX` - Algorytm ekstrapolacyjny (*Gragg–Bulirsch–Stoer*) numerycznego całkowania zagadnień początkowych pierwszego rzędu oparty na jawnej metodzie punktu środkowego. Umożliwia on automatyczny dobór rzędu metody i kroku całkowania.

`RADAU` - Algorytm numerycznego całkowania sztywnych zagadnień początkowych pierwszego rzędu. Algorytm ten bazuje na niejawnej, $L$-stabilnej metodzie Rungego–Kutty typu *Radau IIA*, rzędu 5, 9, 13 z automatyczną zmianą rzędu i kroku całkowania.

`SDIRK4` - Algorytm numerycznego całkowania sztywnych zagadnień początkowych pierwszego rzędu. Algorytm ten opiera się na $L$-stabilnej niejawnej metodzie typu *SDIRK* (*Singly Diagonal Runge–Kutta*), stopnia czwartego, rzędu czwartego z automatycznym doborem kroku całkowania.

[1] E. Hairer - `http://www.unige.ch/~hairer/software.html`
[2] F. Mazzia - `http://www.archimede.dm.uniba.it/~mazzia/ode/gam.html`
[3] J. Cash - `http://dl.acm.org/doi/10.1145/146847.146923`

`SODEX` - Algorytm ekstrapolacyjny oparty na liniowo niejawnej metodzie punktu środkowego z automatycznym wyborem rzędu metody i kroku całkowania.

`GAM` - Algorytm całkowania sztywnych zagadnień początkowych pierwszego rzędu oparty na wielokrokowych, $A$-stabilnych metodach Adamsa (*Generalized Adams Methods*). Umożliwia on automatyczny dobór rzędu metody (pomiędzy 3, 5, 7 i 9) i kroku całkowania.

`MEBDF` - Algorytm całkowania sztywnych zagadnień początkowych pierwszego rzędu oparty na zmodyfikowanych formułach wstecznego różniczkowania (*Modified Extended Backward Differentiation Formulae*). Umożliwia on automatyczny dobór kroku całkowania i rzędu metody (maksymalnie do ósmego rzędu).

Wszystkie obliczenia wykonane za pomocą powyższych algorytmów wykonane zostały na stacji roboczej z procesorem `Xenon E31225 4 x 3.1GHz` pracującej pod kontrolą systemu operacyjnego `Windows 10`. Kod procedur skompilowany został przy pomocy kompilatora `g77 3.4.0`. Obliczenia przeprowadzono w trybie podwójnej precyzji. Kod źródłowy procedur definiujących równania ruchu dla *Modelu A* i *Modelu B* podany jest w załączniku rozprawy doktorskiej [18].

### 3.3.2. Testy algorytmów

W literaturze znaleźć można zbiór zagadnień testowych, dla których przeprowadzono i opublikowano testy porównawcze dla większości opisywanych wyżej algorytmów. Początkowo testy opracowane zostały przez Hairera i Wannera [46] i w dalszych latach zostały rozszerzone i upublicznione przez *CWI*[4] (*National Research Institute for Mathematics and Computer Science in the Netherlands*). Obszerny raport z tych testów zawiera publikacja [59].

Jednym z zagadnień testowych zaproponowanych w obu publikacjach jest problem sprężystej belki (*BEAM Problem*). Problem ten dotyczy dynamiki sprężystej belki zamocowanej

[4] `https://archimede.dm.uniba.it/~testset/testsetivpsolvers/`

w jednym z końców, na którą działa siła wymuszająca w drugim z końców. W modelu tym pomija się dyssypację oraz siły grawitacyjne. Głównym powodem, dla którego odwołujemy się do tego zagadnienia, jest podobieństwo równań ruchu belki do równań ruchu lin prezentowanych w poprzednim rozdziale. Możemy zatem przyjąć rezultaty tych testów jako pierwszy wstępny test algorytmów. Wyniki testów efektywności dla zagadnienia sprężystej belki wyraźnie wskazują na wyższość procedur bazujących na formułach niejawnych. To sugeruje, że mamy do czynienia z zagadnieniem źle uwarunkowanym. W następnym paragrafie przeprowadzimy więc analizę uwarunkowania układu równań ruchu liny w zależności od parametrów równań ruchu.

## 3.4. Analiza stabilności równań ruchu

Pojęcie złego uwarunkowania równań różniczkowych nie jest pojęciem precyzyjnie określonym. Przez zagadnienie źle uwarunkowane (*sztywne*) rozumieć będziemy równania różniczkowe, dla których w wyniku zastosowania niektórych metod numerycznych ujawnia się efekt nienaturalnego zaniżenia długości kroku całkowania, w celu uzyskania wyniku o odpowiedniej precyzji. Bardziej formalnie pojęcie to zdefiniować można w następujący sposób:

**Definicja 3** *[60] Zagadnienie początkowe zdefiniowane jako układ n równań różniczkowych w postaci (3.3) nazywamy* ***źle uwarunkowanym*** *w przedziale $t \in [t_0, t_1]$, jeżeli dla każdego $t$ z tego przedziału zachodzi:*

$$\frac{\max\limits_i(|\lambda_i(t)|)}{\min\limits_i(|\lambda_i(t)|)} \gg 1, \quad Re(\lambda_i(t)) < 0,$$

*gdzie $\lambda_i(t)$ są wartościami własnymi macierzy Jacobiego:*

$$J(t) = \frac{\partial f_i(t,y)}{\partial y_j}, \quad i,j = 1...n.$$

Z tej definicji wynika, że zagadnienia źle uwarunkowane charakteryzują się dużym rozrzutem wartości własnych układu. W ogólnym przypadku, dla równania nieliniowego macierz

Jacobiego oraz jej wartości własne nie są znane, gdyż wyrażone są przez nieznaną funkcję $y$. Dlatego analizę uwarunkowania upraszcza się do przypadku liniowego. W praktyce dokonujemy więc linearyzacji układu równań różniczkowych i badamy uwarunkowanie układu liniowego.

Dla równań ruchu liny w postaci (2.57) linearyzacji dokonujemy w otoczeniu rozwiązania $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ i otrzymujemy następujące równanie liniowe dla równania ruchu liny:

$$\begin{gathered} \mathbf{M}\ddot{\varphi} = n^3\kappa\mathbf{K}\varphi + n^3\rho\mathbf{D}\dot{\varphi} \\ \Downarrow \\ \ddot{\varphi} = n^3\kappa\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\varphi + n^3\rho\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\dot{\varphi}. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Dalszą analizę wykonamy dla *Modelu B* (układu wahadeł), ze względu na specyfikę występujących tam współczynników i możliwość podania rozwiązań w postaci analitycznej. W tym przypadku macierz $\mathbf{K}$ i $\mathbf{D}$ równe są macierzy $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{A}$ zdefiniowanej w (2.50), więc po uproszczeniu równania otrzymujemy:

$$\ddot{\varphi} = n^3\kappa\mathbf{A}^2\varphi + n^3\rho\mathbf{A}^2\dot{\varphi}. \tag{3.8}$$

Powyższe równanie różniczkowe drugiego rzędu zapisać możemy jako układ równań rzędu pierwszego:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix}}_{\dot{\theta}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ n^3\kappa\mathbf{A}^2 & n^3\rho\mathbf{A}^2 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{bmatrix}}_{\theta}. \tag{3.9}$$

Dla macierzy trójdiagonalnej $\mathbf{A}$ w postaci (2.50), o rozmiarze $n$, znane są wartości własne [60]:

$$\lambda_i = -4\sin^2\frac{i\pi}{2(n+1)}, \quad i = 1...n. \tag{3.10}$$

Jeżeli liczba $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartością własną macierzy $\mathbf{A}$, wówczas macierz $\Lambda$ posiada dwie odpowiadające jej wartości własne:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}n^3\rho\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda n\sqrt{\rho^2 n^4\lambda^2 + 4\kappa n}, \tag{3.11}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}n^3\rho\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda n\sqrt{\rho^2 n^4\lambda^2 + 4\kappa n}. \tag{3.12}$$

Dla dowolnego $n > 0$, wartości $\lambda_i$ zawierają się w przedziale $[-4,\ 0]$, a zatem

$$\varepsilon_1 \in \left[8n^3\rho - 2n\sqrt{16\rho^2n^4 + 4\kappa n},\ 0\right], \tag{3.13}$$

$$\varepsilon_2 \in \left[0,\ 8n^3\rho + 2n\sqrt{16\rho^2n^4 + 4\kappa n}\right]. \tag{3.14}$$

Dla $n \to \infty$ wartości własne dążą do: $|\varepsilon_1| \to 1$ i $|\varepsilon_2| \to \infty$. Zatem wskaźnik uwarunkowania dla tego zagadnienia również dąży do $\infty$. Ponadto widzimy, że wartość wskaźnika uwarunkowania zależna jest od wartości $8n^3\rho + 2n\sqrt{16\rho^2n^4 + 4\kappa n}$. Uwarunkowanie zadania będzie się pogarszać wraz ze wzrostem $n$, $\rho$ oraz $\kappa$.

## 3.5. Testy numeryczne

W tej części pracy zdefiniujemy zagadnienie testowe i przedstawimy wyniki testów numerycznych wykonanych dla różnych wersji zagadnienia. Testy stanowić będą podstawę przy wyborze algorytmu obliczeniowego dla problemów dynamiki lin.

### 3.5.1. Zagadnienie testowe spadku liny

Lina o długości $L = 1\ m$ i masie $M = 0,1\ kg$ zaczepiona jest w dwóch końcach leżących na tej samej wysokości i odległych od siebie o $x_0 = 0,5\ m$. Na linę działa tylko siła grawitacji z przyspieszeniem $g = 9,81\ m/s^2$. Przyjmujemy, że początkowo lina wisi swobodnie i nie porusza się. Kształt początkowy liny jest więc *krzywą łańcuchową* opisaną w paragrafie 2.1.2. W chwili początkowej $t_0 = 0$ jeden z końców liny zwolniono i lina spada swobodnie. Przyjmujemy, że lina reprezentowana będzie przez łańcuch zbudowany z $n = 40$ ogniw.

### 3.5.2. Testy wydajności algorytmów numerycznych

W tej części przedstawimy wyniki testów numerycznych dla zagadnienia spadku liny prezentowanego w części 3.5.1. Rozważać będziemy następujące przypadki:

- **Eksperyment I** – spadek łańcucha idealnego: $k = 0\ Nm$, $r = 0\ Nms$,

- **Eksperyment II** – spadek łańcucha sprężystego: $k = 0,1\ Nm$, $r = 0\ Nms$,
- **Eksperyment III** – spadek łańcucha realnego: $k = 0\ Nm$, $r = 0,01\ Nms$.

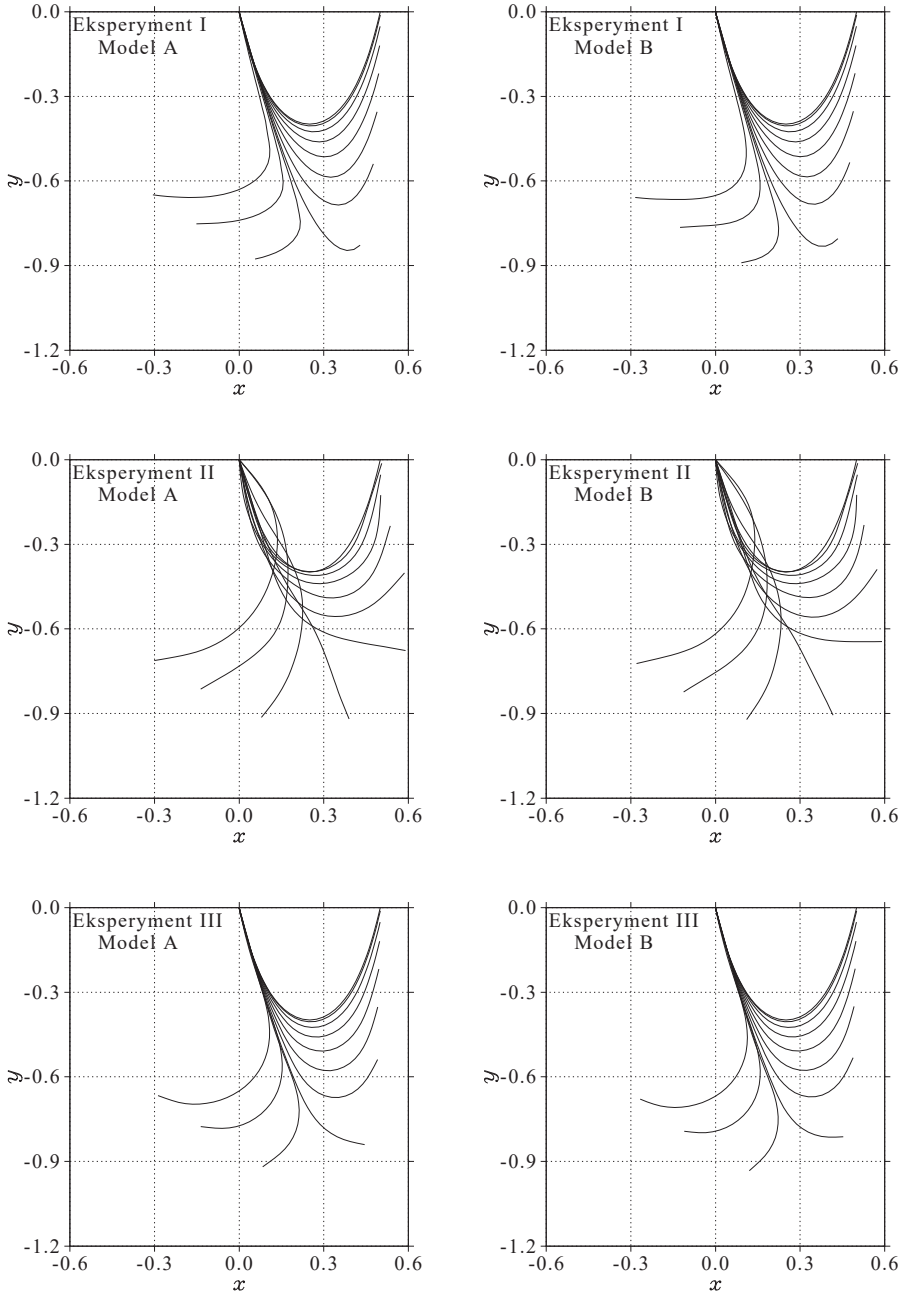
Rysunek 3.1 przedstawia rezultaty obliczeń dla powyżej zdefiniowanych eksperymentów, uzyskanych odpowiednio dla *Modelu A* i *Modelu B* z parametrem dyskretyzacji $n = 40$ i w przedziale $t \in [0,\ 1/2]\ s$. Widzimy, że rezultaty otrzymane dla obu modeli różnią się nieznacznie. Symulację przeprowadziliśmy za pomocą procedury `RADAU`, z tolerancją błędu $10^{-14}$.

Chcielibyśmy ustalić efektywność wybranych algorytmów dla powyższych przypadków testowych i dla różnej tolerancji błędu obliczeń. Da nam to pogląd, która z metod jest najbardziej wydajna w zależności od żądanej dokładności obliczeń. Efektywność algorytmu wyznaczać będziemy dokonując pomiaru czasu obliczeń oraz błędu globalnego wyniku na końcu przedziału całkowania. Błąd rozwiązania numerycznego w zadanej chwili $t$ definiujemy następująco:

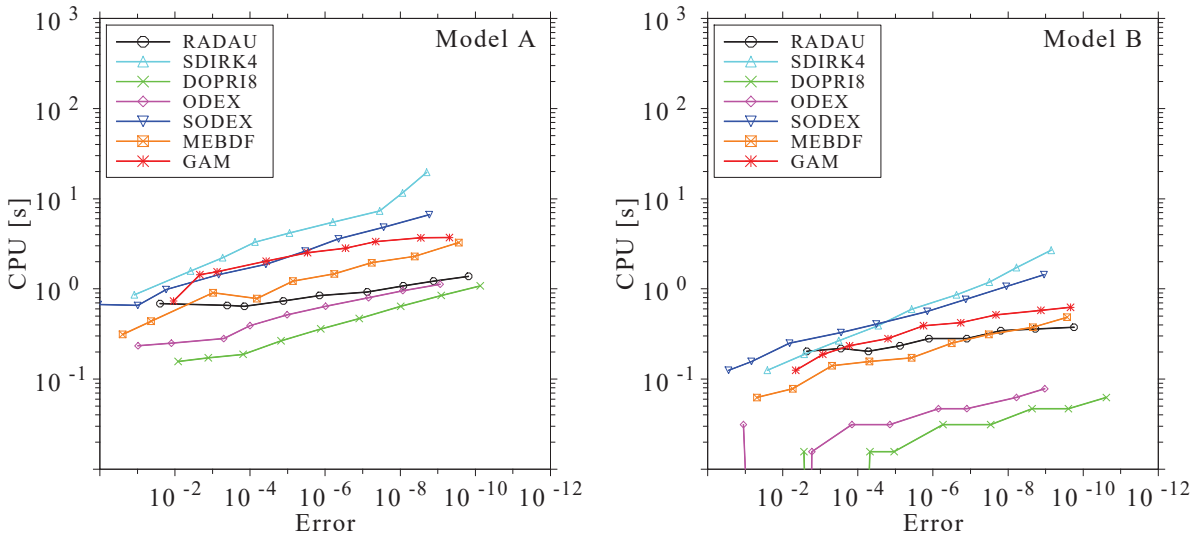
$$Error(t) = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i(t) - \hat{y}_i(t)}{1 + |\hat{y}_i(t)|}\right)^2}, \tag{3.15}$$

gdzie $y(t)$ i $\hat{y}(t)$ są odpowiednio rozwiązaniem numerycznym i rozwiązaniem dokładnym (zawierającym zarówno położenie $\varphi_i$ jak i prędkość $\dot{\varphi}_i$). Rozwiązanie analityczne dla problemu spadku liny nie jest znane. Dlatego jako rozwiązanie dokładne $\hat{y}_i(t)$, $i = 1...2n$, przyjmujemy rozwiązanie przybliżone otrzymane metodą `RADAU5`, z tolerancją błędu lokalnego równą $10^{-14}$. Testy numeryczne polegać będą na wykonaniu serii obliczeń z tolerancją błędu lokalnego $tol = 10^{-2}, 10^{-3}, ..., 10^{-10}$ i wyznaczeniu czasu obliczeń $CPU$ oraz błędu otrzymanego na końcu przedziału całkowania $Error{=}Error(0,5)$. Wyniki zaprezentujemy w postaci diagramów w skali logarytmicznej prezentujących zależność nakładów pracy wyrażonych jako czas obliczeń od precyzji obliczeń (*work-precision diagram*).

Obliczenia przeprowadzimy niezależnie dla *Modelu A* i *B*, opisanych odpowiednio w paragrafach 2.3.1 i 2.3.3. Zweryfikujemy w ten sposób, jaki wpływ na dokładności i czas obliczeń ma transformacja równań ruchu 2.3.3.




**Rysunek 3.1:** Symulacja spadku liny dla *Modelu A* i *Modelu B*. Rysunki przedstawiają kształt liny otrzymany w *Eksperymencie I*, *II* oraz *III* z krokiem co $\Delta t = 0,05\ s$. Lina o długości $L = 1\ m$ i masie $M = 0,1\ kg$ reprezentowana jest przez łańcuch o $n = 40$ segmentach.



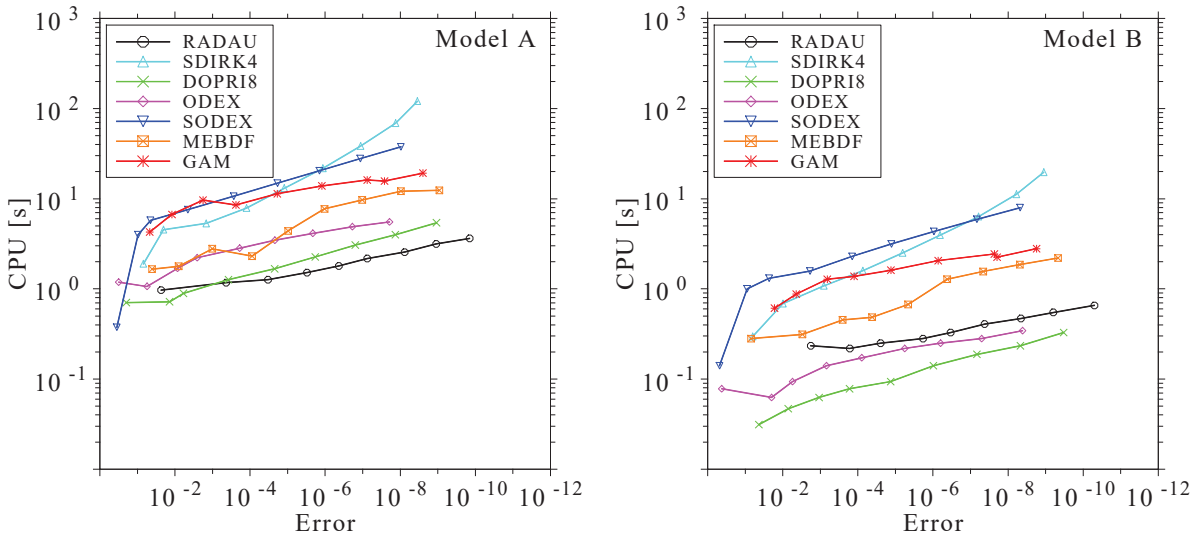

**Rysunek 3.2:** Diagram zależności nakładu pracy od precyzji – *Eksperyment I*. Wykresy pokazują czas obliczeń *CPU* i precyzję obliczeń *Error*, otrzymane dla wybranych algorytmów numerycznych z tolerancją błędu lokalnego $tol = 10^{-2}, 10^{-3}, ..., 10^{-10}$. Obliczenia przeprowadzono dla *Eksperymentu I* przy użycia *Modelu A* i *Modelu B*.

### Eksperyment I

Dla tego przypadku rezultaty obliczeń przedstawione na rysunku 3.2 pokazują przewagę metod jawnych nad niejawnymi. Wśród nich wyróżnia się algorytm `DOPRI8`, dla którego otrzymaliśmy najlepsze rezultaty w całym zakresie tolerancji błędu. Zagadnienie to nie wykazuje zatem sztywności. Porównując wyniki dla obu modeli stwierdzamy znaczną przewagę *Modelu B*, jeżeli chodzi o czas obliczeń. Orientacyjnie, czas wykonania obliczeń dla tego modelu jest od pięciu do dziesięciu razy krótszy niż dla *Modelu A*.

### Eksperyment II

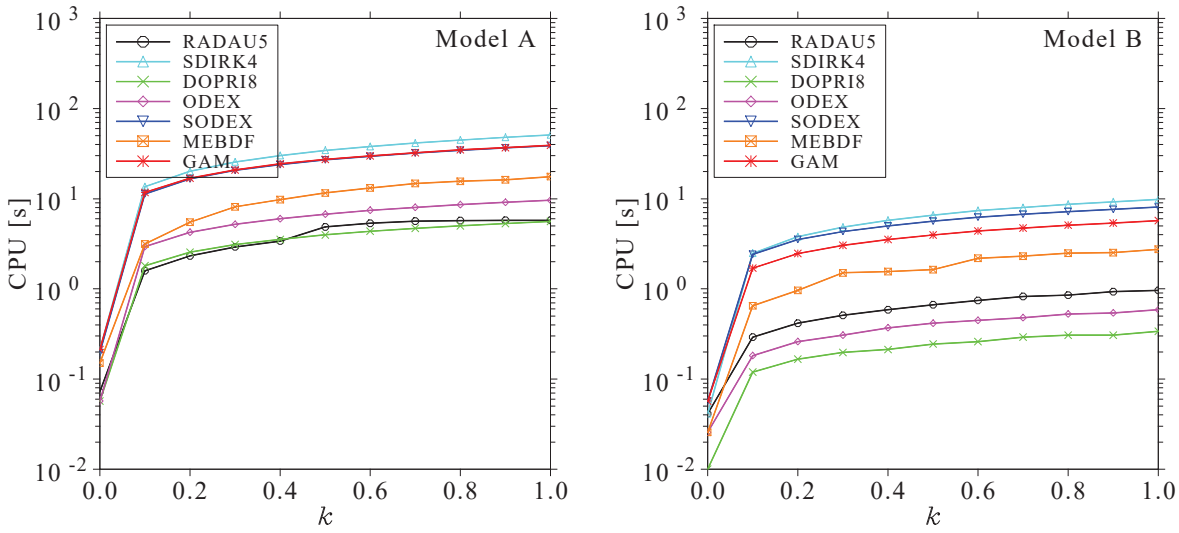
Rysunek 3.3 przedstawia rezultaty obliczeń dla *Eksperymentu II*. W tym przypadku metody jawne również osiągają lepsze wyniki. Wśród metod jawnych bardzo dobre rezultaty w obu przypadkach osiągnęła procedura `DOPRI8`. Jeżeli chodzi o metody niejawne, wyjątkiem jest tu procedura `RADAU`, która dla *Modelu A* i wyższych tolerancji błędu okazała się najbardziej




**Rysunek 3.3:** Diagram zależności nakładu pracy od precyzji – *Eksperyment II*. Wykresy pokazują czas obliczeń *CPU* i precyzję obliczeń *Error*, otrzymane dla wybranych algorytmów numerycznych z tolerancją błędu lokalnego $tol = 10^{-2}, 10^{-3}, ..., 10^{-10}$. Obliczenia przeprowadzono dla *Eksperymentu II* przy użycia *Modelu A* i *Modelu B*.

efektywna. Porównując otrzymane wyniki do wyników dla *Eksperymentu I* widzimy, że wzrósł czas obliczeń dla wszystkich metod.

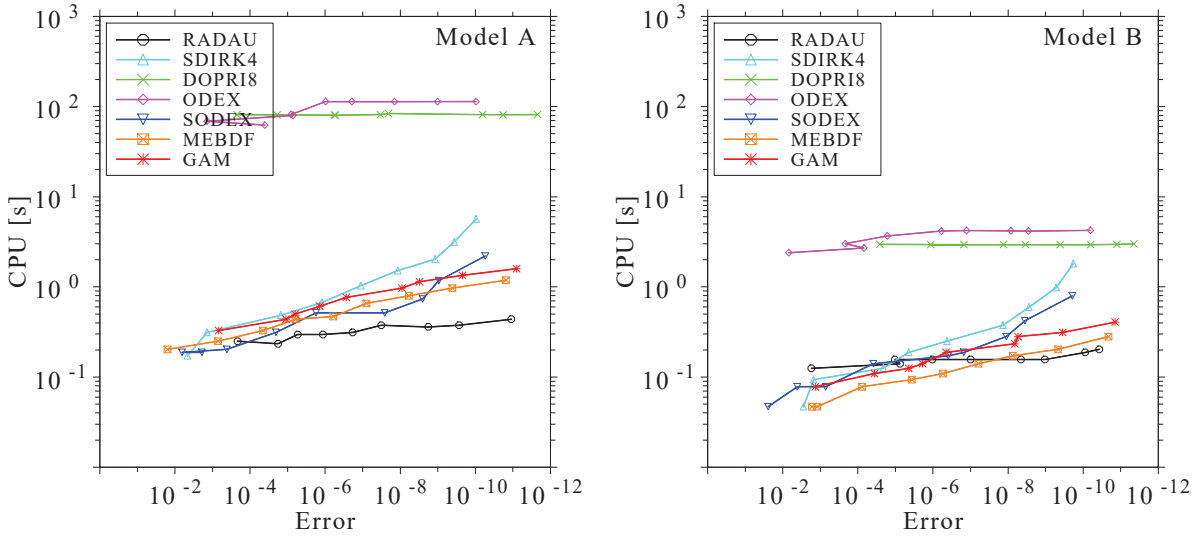
W celu pełniejszego zrozumienia wpływu tego czynnika na rozwiązanie numeryczne przeprowadzimy dodatkowe testy dla $k = i/10$ dla $i = 0...10$. Przyjmujemy, że wszystkie inne parametry równań ruchu zostają takie same jak w *Eksperymencie II*, obliczenia wykonamy dla tolerancji błędu $10^{-6}$. Na rysunku 3.4 pokazano czas obliczeń dla zmieniającego się parametru $k$. Przy wzroście współczynnika $k$ obserwujemy wzrost nakładów obliczeniowych. Wytłumaczeniem tego zjawiska może być pojawienie się małych drgań w układzie po wprowadzeniu sprężystości złącz, co wiąże się z potrzebą zmniejszenia kroku całkowania. Dodatkowo efekt ten może być wynikiem pogorszenia się wskaźnika uwarunkowania równań ruchu, na co wskazywała analiza stabilności 3.4. Dobre wyniki uzyskane dla metod jawnych świadczą jednak, że sztywność równań nie jest duża. Porównując efektywność obliczeń dla obu modeli, widzimy tu również znaczną przewagę *Modelu B* nad *Modelem A*.




**Rysunek 3.4:** Diagram zależności nakładu pracy od parametru $k$. Wykresy pokazują czas obliczeń $CPU$ w zależności od parametru sprężystości $k$ dla wybranych algorytmów numerycznych. Obliczenia przeprowadzono dla *Eksperymentu II* z tolerancją błędu $10^{-6}$, przy użycia *Modelu A* i *Modelu B*.

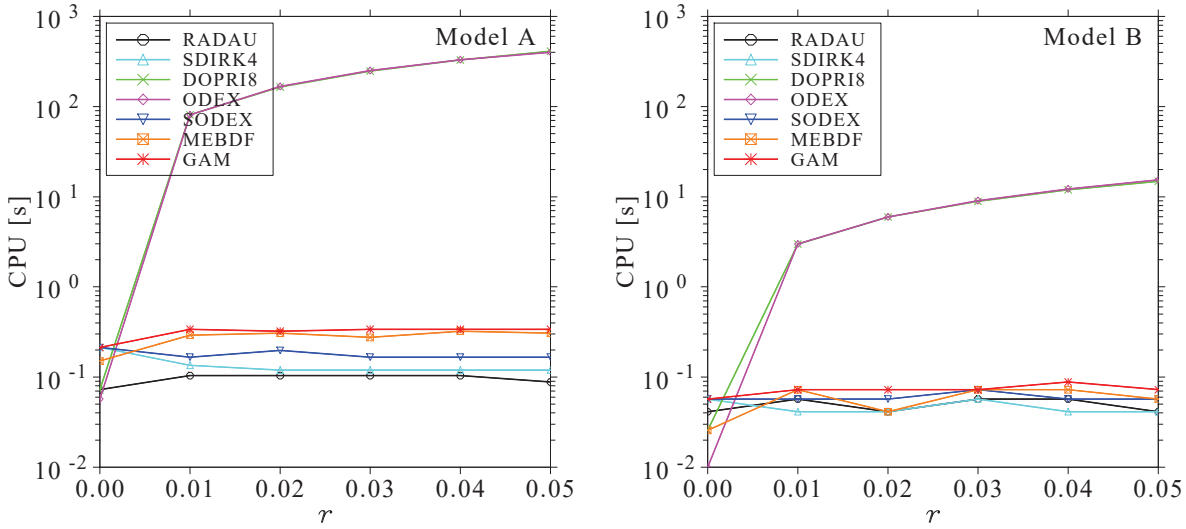
### Eksperyment III

Wyniki otrzymane w tym eksperymencie i przedstawione na wykresach 3.5 ujawniają, że po wprowadzeniu tarcia wewnętrznego w złączach, uwarunkowanie równań ruchu znacznie się pogorszyło. Rezultaty otrzymane dla metod niejawnych porównywalne są do wyników z *Eksperymentu I*. Dla metod jawnych różnica w czasie obliczeń jest ogromna (rzędu $10^2$). W tym przypadku stabilność metody wymaga drastycznego zmniejszenia kroku całkowania i tym samym czasu obliczeń niezależnie od wymaganej precyzji obliczeń. Zastosowanie metod niejawnych jest w tym przypadku konieczne. Na szczególną uwagę zasługują algorytmy `RADAU` i `MEBDF`. Czas obliczeń dla *Modelu B* jest znacznie mniejszy niż dla *Modelu A*. Podobnie, jak dla współczynnika sprężystości, wykonamy dodatkowe testy dla różnych parametrów $r = i/100$, $i = 0...5$ i tolerancji błędu na poziomie $10^{-6}$. Rysunek 3.6 przedstawia wyniki tych obliczeń.




**Rysunek 3.5:** Diagram zależności nakładu pracy od precyzji – *Eksperyment III*. Wykresy pokazują czas obliczeń $CPU$ i precyzję obliczeń $Error$, otrzymane dla wybranych algorytmów numerycznych z tolerancją błędu lokalnego $tol = 10^{-2}, 10^{-3}, ..., 10^{-10}$. Obliczenia przeprowadzono dla *Eksperymentu III* przy użyciu *Modelu A* i *Modelu B*.

Dla metod niejawnych czas obliczeń praktycznie nie zmienia się przy rosnącym parametrze $r$. Dla metod jawnych obserwujemy wzrost czasu obliczeń, co potwierdza, że w tym przypadku wymagane są metody stabilne.

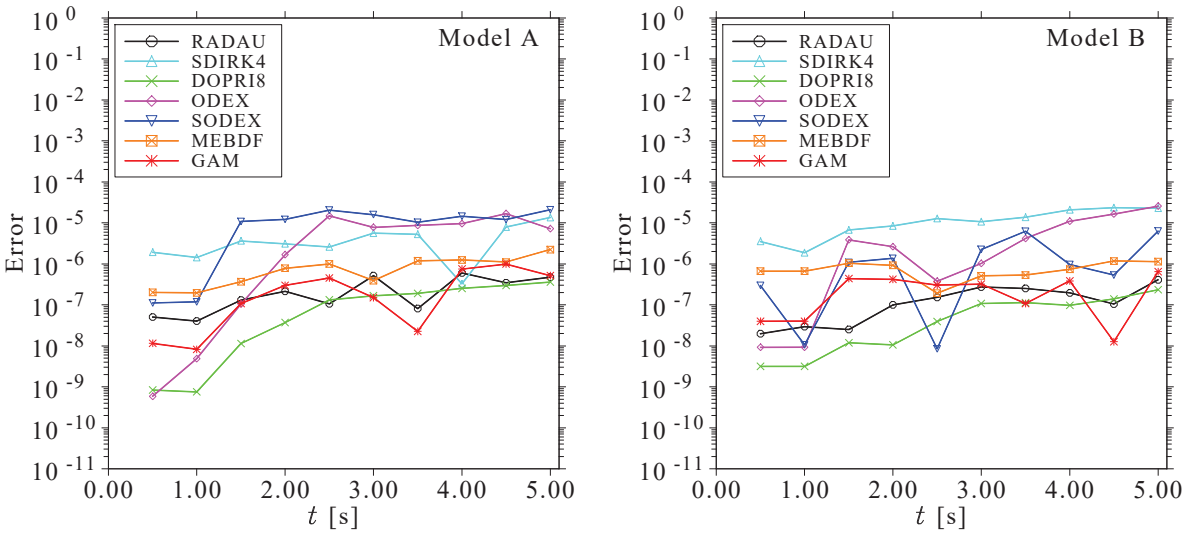



**Rysunek 3.6:** Diagram zależności nakładu pracy od parametru $r$. Wykresy pokazują czas obliczeń $CPU$ w zależności od parametru dyssypacji $r$ dla wybranych algorytmów numerycznych. Obliczenia przeprowadzono dla *Eksperymentu III* z tolerancją błędu $10^{-6}$, przy użyciu *Modelu A* i *Modelu B*.

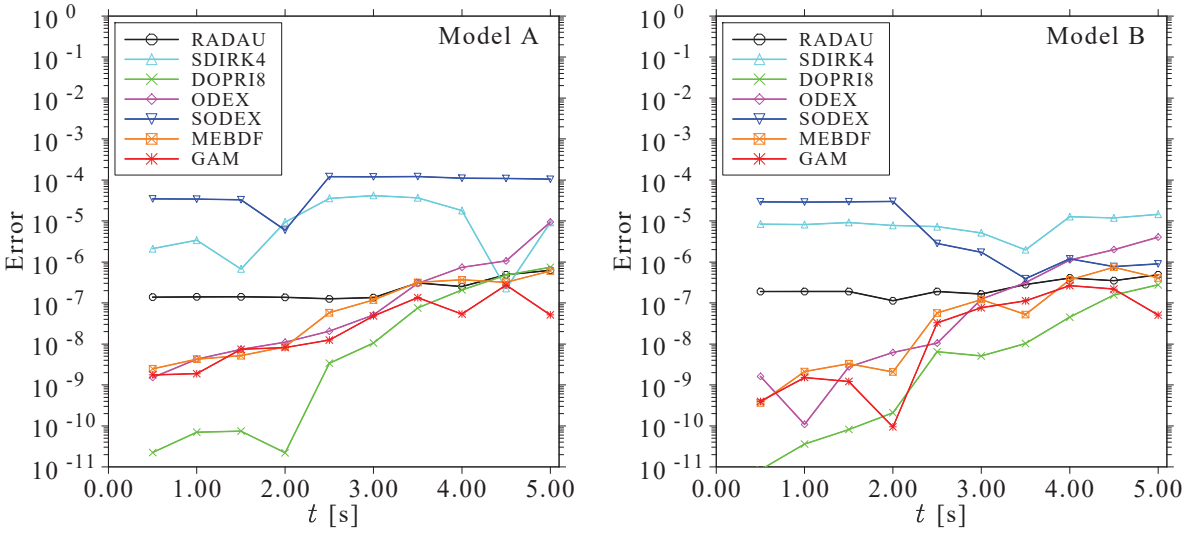
### Dokładność obliczeń

W powyższych eksperymentach jako wartość dokładną przyjmowaliśmy wartość obliczoną za pomocą algorytmu numerycznego z dużą precyzją (większą niż zastosowaną w eksperymentach). Równania ruchu dla $r = 0$ są układem zachowawczym i w tym przypadku dokładność obliczeń możemy zweryfikować porównując energię całkowitą układu $E(t)$ w kolejnych krokach całkowania z wartością energii w chwili początkowej $E(0)$. Błąd energii definiować będziemy jako $Error(t) = |(E(t) - E(0))/E(0)|$. Możemy zatem przeprowadzić ponownie obliczenia dla eksperymentów I i II dla dłuższego przedziału całkowania $t \in [0,\ 5]$ $s$ i sprawdzić błąd energii. Rezultaty tych obliczeń przedstawiają rysunki 3.7 i 3.8.

Dla większości algorytmów, błąd energii otrzymany w trakcie obliczeń nie przekracza zadanej precyzji $10^{-6}$, niezależnie od modelu. Najmniejszy błąd uzyskaliśmy dla metody `DOPRI8`. Na uwagę zasługuje również metoda `RADAU`, dla której błąd obliczeń jest bardzo stabilny na poziomie $10^{-7}$.




**Rysunek 3.7:** Błąd energii całkowitej – *Eksperyment I*. Wykresy pokazują błąd względny energii całkowitej liny *Error* w czasie $t$, dla wybranych algorytmów numerycznych. Obliczenia przeprowadzono dla *Eksperymentu I* z tolerancją błędu $10^{-6}$, przy użyciu *Modelu A* i *Modelu B*.



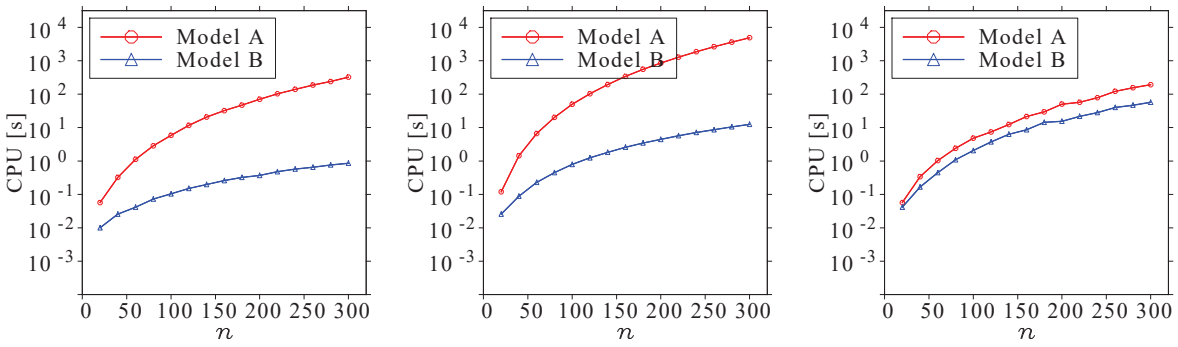

**Rysunek 3.8:** Błąd energii całkowitej – *Eksperyment II*. Wykresy pokazują błąd względny energii całkowitej liny *Error* w czasie $t$, dla wybranych algorytmów numerycznych. Obliczenia przeprowadzono dla *Eksperymentu II* z tolerancją błędu $10^{-6}$ przy użycia *Modelu A* i *Modelu B*.

Podobne eksperymenty wykonane zostały w pracy [61] dla algorytmów `RADAU` i `MEBDF`. Autorzy pokazali znaczny spadek dokładności obliczeń w przypadku zastosowania algorytmu `RADAU` w symulacji spadku liny. Wyniki uzyskane w tym paragrafie nie potwierdzają jednak spadku dokładności obliczeń (błędu energii całkowitej) dla algorytmu `RADAU`.

### Współczynnik dyskretyzacji równań

Na koniec wykonamy testy dla problemu spadku liny z rosnącym parametrem dyskretyzacji równań ruchu $n$ (rosnącą liczbą segmentów, z których zbudowana jest lina). Z analizy stabilności równań wynika, że wzrost parametru $n$ ma wpływ na pogorszenie się wskaźnika uwarunkowania układu. Obliczenia wykonaliśmy z tolerancją $10^{-6}$ stosując metodę `DOPRI8` dla dwóch pierwszych eksperymentów i `RADAU` dla trzeciego eksperymentu.

Na rysunku 3.9 prezentujemy wykresy zależności czasu obliczeń od parametru $n = i \times 20$ z $i = 1...15$ dla *Eksperymentów I*, *II* i *III*.




**Rysunek 3.9:** Czas obliczeń dla różnych wartości parametru dyskretyzacji $n$. Wykresy pokazują czas obliczeń $CPU$ spadku liny otrzymany dla *Modelu A* i *Modelu B* w zależności od parametru dyskretyzacji $n$. Obliczenia przeprowadzono za pomocą algorytmu `DOPRI8` (*Eksperymentu I* i *II*) i `RADAU` (*Eksperymentu III*) z tolerancją błędu $10^{-6}$.

Porównując oba modele widzimy, że różnica czasu obliczeń jest bardzo duża. W pierwszym i drugim przypadku czas obliczeń dla *Modelu A* jest około pięćset razy dłuższy niż dla *Modelu*

$B$, przy $n = 300$. W trzecim przypadku, różnica jest tylko dziesięciokrotna (zastosowany tu został jednak algorytm niejawny). Na uwagę zasługują rezultaty dla *Eksperymentu II*. Czas obliczeń dla tego przypadku jest znacznie dłuższy niż w pozostałych przypadkach niezależnie od modelu. Wynika z tego, że charakter rozwiązania wpływa na znaczne zmniejszenie się kroku obliczeń i wzrost pracochłonności obliczeń.

Średnie odchylenie kwadratowe rezultatów na końcu przedziału całkowania otrzymanych dla obu modeli, przy $n = 300$, jest rzędu $10^{-3}$ $m$. Porównując energię dla obu przypadków, różnica jest rzędu dokładności maszynowej. Wnioskujemy z tego, że dla rosnącego $n$ *Model A* można zastąpić przez *Model B* i w znacznym stopniu skrócić czas obliczeń.

## 3.6. Opis algorytmów

Po analizie wyników testów prezentowanych w poprzedniej sekcji, w dalszej części zajmiemy się już tylko algorytmami `DOPRI8` i `RADAU`, dla których uzyskaliśmy najlepsze rezultaty. Podstawą tych algorytmów są metody Rungego-Kutty. W tej części przedstawimy ich krótką charakterystykę oraz szczegóły implementacji algorytmów.

### 3.6.1. Metody Rungego-Kutty

Dane jest zagadnienie początkowe pierwszego rzędu postaci (3.3).

**Definicja 4** *Metoda Rungego-Kutty (RK) stopnia* $\boldsymbol{s}$ *dla zagadnienia (3.3) zdefiniowana jest w następujący sposób:*

$$\begin{aligned} k_i &= f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{i,j} k_j), \quad i = 1...s, \\ y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \end{aligned} \tag{3.16}$$

*gdzie* $a_{i,j}, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ *są współczynnikami metody,* $h$ *jest krokiem całkowania.*

Współczynniki metod Rungego-Kutty prezentuje się zazwyczaj w postaci *tabliczki Butchera*:

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^{\mathrm{T}} \end{array}, \tag{3.17}$$

gdzie $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$, $\mathbf{b} = [b_i]$, $\mathbf{c} = [c_i]$, $i, j = 1...s$. Dodatkowo przyjmuje się również, że między współczynnikami $c_i$ i $a_{i,j}$ zachodzą następujące związki

$$c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{i,j}, \quad i = 1...s. \tag{3.18}$$

Najbardziej ogólnym podziałem metod *RK* jest podział na metody jawne i niejawne. Metody jawne *ERK* (*Explicit Runge-Kutta*) charakteryzują się tym, że współczynniki $a_{i,j}$ równe są zero dla $j \geqslant i$. Metody *RK* posiadające niezerowe elementy diagonalne lub powyżej diagonali macierzy współczynników **A** nazywamy niejawnymi. W skrócie oznaczać będziemy je *IRK* (*Implicit Runge-Kutta*). Podział ten jest bardzo istotny ze względu na różnice w implementacji algorytmu oraz właściwości numeryczne takie jak rząd, zbieżności i stabilność.

Dla metod jawnych rząd metody jest mniejszy lub równy stopniowi metody. Do zalet tych metod należy bardzo prosta implementacja. Wadą jest nieefektywność w przypadku zagadnień sztywnych.

Metody niejawne mogą mieć rząd większy od stopnia metody i dla tej klasy metod możliwa jest konstrukcja metod stabilnych. Ceną w tym przypadku jest złożoność implementacji.

### 3.6.2. Implementacja metody jawnej Rungego–Kutty

Metody *ERK* zdobyły swą popularność dzięki swojej prostej strukturze, umożliwiającej łatwą implementację algorytmu. Podstawą każdego algorytmu numerycznego jest odpowiednia metoda numeryczna. Współczesne algorytmy oparte na metodach *ERK* bazują na schematach *zanurzonych* (*Embedded Runge-Kutta methods*) definiujących dwie metody o różnych rzędach i współdzielących współczynniki $a_{i,j}$. Do najbardziej efektywnych schematów tego typu zaliczamy schematy *DOPRI5(4)*, *DOPRI8(7)* i *DOPRI8(5,3)*, skonstruowane przez Dormand'a i Prince'a [62, 63]. Te schematy zastosowane zostały w wielu bardzo popularnych pakietach numerycznych. Należą do nich między innymi `RKSUITE` [64], `DXRK8` [65] czy wspomniane już algorytmy `DOPRI5`/`DOPRI8`/`DOP853` [56].

W naszej pracy wykorzystywać będziemy algorytm oparty na schemacie *DOPRI8(7)*. Jest to schemat trzynastego stopnia ($s = 13$), zawierający dwie metody zanurzone rzędu ósmego

i siódmego. Umożliwia on zatem uzyskanie rozwiązania numerycznego rzędu ósmego $y_{n+1}$ i siódmego $\hat{y}_{n+1}$. Formuła została wyznaczona tak, aby główna część błędu metody rzędu ósmego była minimalna. Ten schemat jest jednym z najbardziej efektywnych znanych metod *ERK*. Najważniejszą częścią implementacji oprócz samego wyznaczenia wartości $y_{n+1}$ jest automatyczny dobór kroku w zależności od zadanej tolerancji *TOL*. Strategia doboru kroku jest istotną częścią algorytmu i od niej zależeć będzie efektywność algorytmu. W naszej implementacji zastosowaliśmy algorytm lokalnej ekstrapolacji oraz technikę zmiany kroku całkowania zwaną *PI Step Size Control* [56, 66].

Zastosowanie metod *zanurzonych* umożliwia oszacowanie błędu lokalnego rozwiązania bardzo niskim kosztem. Oszacowanie to uzyskać można w następujący sposób:

$$err_n = y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} = h \sum_{i=1}^{s} \underbrace{(b_i - \hat{b}_i)}_{e_i} k_i. \tag{3.19}$$

Przyjmując, że za pomocą metody ósmego rzędu otrzymujemy dokładniejszy wynik, powyższe wyrażenie jest oszacowaniem błędu lokalnego dla $\hat{y}_{n+1}$. Jako rozwiązanie numeryczne przyjmować będziemy jednak wartość $y_{n+1}$. Technika ta nosi nazwę *lokalnej ekstrapolacji*. Szereg testów opisywanych w literaturze potwierdza słuszność tego podejścia [67].

W przypadku, gdy obliczenia zakończyły się pomyślnie ($err_n \leqslant TOL$), wówczas przyjmujemy wartość $y_{n+1}$ jako nową wartość początkową i obliczamy długość kolejnego kroku całkowania:

$$h_{n+1} = h_n \min\left(fac_{max}, \max\left(fac_{min}, fac\left(\frac{TOL}{|err_n|}\right)^{\alpha}\left(\frac{|err_{n-1}|}{TOL}\right)^{\beta}\right)\right), \tag{3.20}$$

gdzie $\alpha = 0,7/p = 0,0875$ i $\beta = 0,4/p = 0,05$, a $p$ jest rzędem metody zdefiniowanym w 1. Dodatkowo wprowadziliśmy współczynnik bezpieczeństwa $fac = 0,9$ oraz ograniczenia na zmianę długości kroku $fac_{min} = 0,25$ i $fac_{max} = 5$.

Jeżeli krok nie został zaakceptowany ($err_n > TOL$), wówczas obliczenia należy powtórzyć przyjmując następującą długość kroku:

$$h_{n+1} = 0,8 h_n \left(\frac{TOL}{|err_n|}\right)^{1/(p+1)}. \tag{3.21}$$

### 3.6.3. Implementacja metody niejawnej Rungego–Kutty

W przypadku zastosowania metody *IRK* stopnia $s$ do problemu rzędu $n$, wyznaczenie wartości $k_i$ wymaga rozwiązania nieliniowego układu równań z $n \times s$ niewiadomymi. Z tego względu jeszcze do niedawna te metody były wyłącznie źródłem teoretycznych rozważań. Obecnie, jak pokazali Hairer i Wanner [46], efektywna implementacja algorytmów bazujących na metodach niejawnych jest możliwa.

Algorytm używany w niniejszej pracy bazuje na schematach typu *Radau IIA*. Ta metoda charakteryzuje się najlepszą stabilnością wśród metod *RK* i dodatkowo jest rzędu $p = 2s - 1$ [46]. Mechanizm automatycznej kontroli kroku całkowania dla powyższego schematu oparty został na idei metod włożonych. W tym przypadku możliwe jest znalezienie współczynników $\hat{b}_i$, dla których wartość:

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^{s} \hat{b}_i k_i,$$

gdzie $k_0 = f(x_n,\ y_n)$, będzie przybliżeniem rozwiązania rzędu czwartego. Implementacja algorytmu doboru kroku całkowania będzie przebiegać zatem identycznie jak w przypadku metody jawnej.

Ze względu na potrzebę rozwiązania nielinowego układu równań, efektywna implementacja metody niejawnej wymaga zmiany definicji metody. Redukcja wpływu błędów zaokrągleń podczas obliczeń możliwa jest dzięki zastosowaniu pomocniczych zmiennych:

$$z_i = h \sum_{j=1}^{s} a_{i,j} f(x_n + c_i h, y_n + z_j), \quad i = 1...s. \tag{3.22}$$

Po wprowadzeniu powyżej zdefiniowanych zmiennych do definicji metody *RK*, przybliżone rozwiązanie zagadnienia (3.2) zapisać możemy w następującej postaci:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{s} d_i z_i, \tag{3.23}$$

gdzie $\mathbf{d} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}$. Wyznaczenie wartości $y_{n+1}$ wymaga więc rozwiązania nieliniowego układu równań (3.22). Aplikacja metody Newtona do wyznaczenia wartości $z_i$ związana będzie zatem

z rozwiązaniem układu równań liniowych z macierzą:

$$\begin{bmatrix} I - ha_{1,1}J_1 & \cdots & I - ha_{1,s}J_s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I - ha_{s,1}J_1 & \cdots & I - ha_{s,s}J_s \end{bmatrix}, \tag{3.24}$$

gdzie $J_i = \frac{\partial f}{\partial y}(x_n + c_i h, y_n + z_i)$. Obliczenie wartości Jakobianu jest zazwyczaj bardzo kosztowne. W celu redukcji kosztu obliczeń wartości $J_i$ zastępujemy wartością $J \approx \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)$.

Algorytm zastosowany w tej pracy w całości oparty został na procedurze `RADAU5` opracowanej przez Hairera i Wannera [46].

## 3.7. Podsumowanie

Podsumowując powyższe rozważania stwierdzić można, że dla łańcucha i liny z $r = 0$ równania ruchu są dobrze uwarunkowane i do obliczeń zastosować można metody jawne. W tym przypadku najlepsze rezultaty osiągnęliśmy dla procedury **`DOPRI8`** i ten algorytm stosować będziemy w symulacjach. Jeżeli pomiędzy elementami występuje tarcie wewnętrzne ($r > 0$), to układ równań ruchu jest źle uwarunkowany i do całkowania numerycznego wymagana jest metoda niejawna. Ze względu na bardzo dobre wyniki otrzymane dla tego typu problemów stosować będziemy algorytm **`RADAU`**. Porównując wyniki obliczeń dla obu modeli wyraźnie widać dużą przewagę efektywności obliczeń dla *Modelu B*. Efektywność metod dla tego modelu widoczna będzie w szczególności przy symulacjach z dużym $n$.

Algorytmy opisane w tym rozdziale zostały zaimplementowane w postaci pakietu obliczeniowego `ODE-PACK` opracowanego w języku *C++*. Implementacja algorytmu `RADAU5` w języku *C++* bazuje na procedurze *StiffIntegrator* dostępnej w pakiecie *Integrator*[5].

Kod programów w *C++* skompilowany został przy pomocy kompilatora `bcc` (*Borland C++ 5.6*). Do obliczeń z wykorzystaniem procedur w języku *Fortran* zastosowany został kompilator `g77 3.4.0` (*GNU Fortran 77*). Wszystkie obliczenia przeprowadzono w trybie

[5] `http://www.unige.ch/~hairer/prog/IntegratorT.tgz`

podwójnej precyzji. Obliczenia numeryczne wykonane zostały na stacji roboczej z procesorem `Xenon E31225 4 x 3.1GHz` pracującej pod kontrolą systemu operacyjnego `Windows 10`.

# Rozdział 4
# Spadek swobodny łańcucha złożonego

Spadek swobodny ciał w polu grawitacyjnym jest klasycznym, dobrze znanym problemem fizycznym i wydaje się, że nic nowego nie można tu dodać. Jednakże rozwój metod numerycznych i symulacji komputerowych umożliwił badanie zjawisk, dla których brakowało rozwiązań analitycznych lub odpowiedniej technologii laboratoryjnej. Do takich zagadnień należy również spadek łańcucha.

Krótkie wprowadzenie do historii zagadnienia spadającego łańcucha zostało przedstawione w pracy [68]. Jednym z problemów omawianych w tej pracy jest problem łańcucha leżącego na krawędzi stołu. Jeżeli jeden z końców łańcucha znajdzie się poza krawędzią stołu, wówczas rozpoczyna się spadek łańcucha. Jeśli założymy, że łańcuch zsuwa się bez tarcia, wtedy zagadnienie to można rozwiązać analitycznie i wykazać, że łańcuch spada ze stałym przyspieszeniem. Niespodzianką jest to, że przyspieszenie nie jest równe $g$, jak można by przypuszczać, ale $g/3$ jak pokazano w pracy [68]. Dodatkowo w pracy [69] zaprezentowano rezultaty eksperymentów laboratoryjnych dla tego zagadnienia.

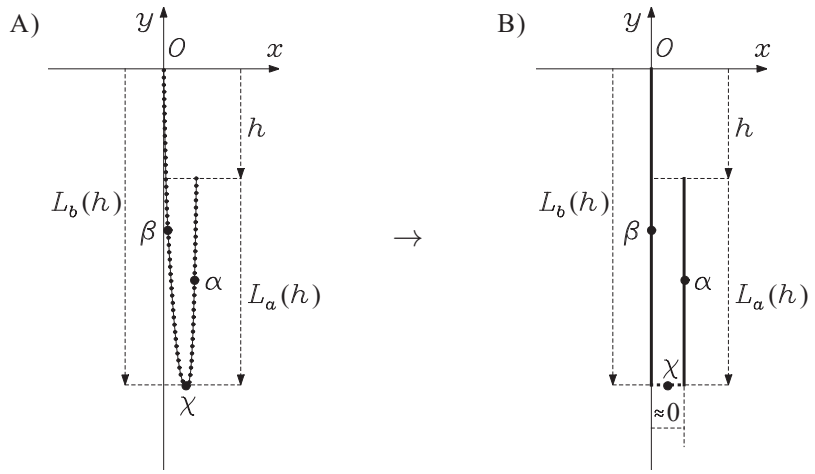
Podobnym problemem jest zagadnienie spadku łańcucha zawieszonego początkowo na obu końcach do poziomej podpory. Jeżeli założymy, że odległość zaczepienia obu końców jest bardzo mała (równa 0 dla przypadku idealnego), wówczas dla tego zagadnienia istnieje rozwiązanie analityczne. W tym przypadku okazało się, że łańcuch spada z przyspieszeniem większym niż $g$. Po raz pierwszy rozwiązanie to zaprezentowane zostało w pracy [70], a następnie powtórzone w pracach [12, 71]. Wyniki analizy zostały potwierdzone zarówno eksperymentalnie jak i w symulacjach komputerowych w pracach [12, 14] oraz w naszej pracy

[71].

W niniejszej pracy powtórzymy część z tych badań, rozszerzając je na przypadek spadku łańcucha realnego. Dodatkowo, omówiony tu zostanie mechanizm, który odpowiedzialny jest za wzrost przyspieszenia podczas spadku takiego łańcucha. Na początku zajmiemy się rozwiązaniem analitycznym dla przypadku całkowicie złożonego łańcucha.

## 4.1. Rozwiązanie analityczne dla spadającego końca łańcucha złożonego

Aby uzyskać obraz, czego możemy spodziewać się w eksperymentach ze spadającym łańcuchem, rozważmy najpierw przypadek łańcucha złożonego, wiszącego na poziomej podstawie, z końcami zaczepionymi w bardzo bliskiej odległości, w idealnym przypadku $x_0 = 0$. Dla takiego przypadku możliwa jest konstrukcja uproszczonego modelu analitycznego. W modelu tym łańcuch postrzegamy, jako ciągłą nieskończenie cienką, idealnie wiotką, linę zgiętą w pewnym puncie o nieskończenie małej długości. Początkowo oba końce liny przymocowane są do punktu podparcia $O$. Następnie, w czasie $t = 0$, jeden z jej końców jest zwalniany i lina zaczyna spadać. Zakładamy, że podczas spadku konformacja liny składa się z dwóch części. Część pierwsza spada i skraca się podczas spadku. Część druga jest nieruchoma i wydłuża się wraz z upływem czasu. Przyjmujemy, że mamy linę o długości całkowitej $L$ i masie $M$ równomiernie rozprowadzonej po całej jej długości. Do opisu ruchu wprowadzamy nową zmienną $h$ oznaczającą wychylenie swobodnie spadającego końca liny od swojej pierwotnej pozycji. Współrzędna $h$ jest więc skierowana w dół, w kierunku pola grawitacyjnego. Zamieszczony tutaj rysunek 4.1 przedstawia schemat rzeczywistego łańcucha podczas spadku i odpowiadający mu model analityczny złożonej liny. Dla uproszczenia, model analityczny liny nazywać będziemy dalej modelem łańcucha. Model ten przedstawiony został również w pracach [70, 12, 71].




**Rysunek 4.1:** Model analityczny łańcucha podczas spadku. Na rysunku A) przedstawiony został schemat łańcucha podczas spadku a na rysunku B) odpowiadający mu model analityczny. Spadający łańcuch podzielić można na dwie równoległe części: część spadającą i część, która jest nieruchoma. Dystans, jaki przebyła spadająca cześć łańcucha, oznaczony został przez zmienną $h$. Długość części spadającej to $L_a(h)$ a części nieruchomej $L_b(h)$. Środki mas obu części oznaczone zostały przez $\alpha$ i $\beta$ a punkt łączący obie części przez $\chi$.

### 4.1.1. Analiza energii spadającego łańcucha

Równania ruchu dla tak zdefiniowanego modelu można wyznaczyć analitycznie stosując zasadę zachowania energii. W pracy [71] podaliśmy postać tych równań wykorzystując zmienną $y$ określającą położenie łańcucha w prostokątnym układzie współrzędnych. W tej pracy, do opisu ruchu używać będziemy zmiennej $h$. Przy użyciu tej zmiennej możemy określić długość i masę obu części łańcucha:

$$\begin{aligned} L_a(h) &= \frac{L-h}{2}, \quad M_a(h) = \frac{(L-h)M}{2L}, \\ L_b(h) &= \frac{L+h}{2}, \quad M_b(h) = \frac{(L+h)M}{2L}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Położenia środków mas części spadającej i nieruchomej, oznaczonych odpowiednio przez $\alpha$ i $\beta$, wyrażone przez zmienną $h$ równe są:

$$\begin{aligned} y_\alpha(h) &= -h - \frac{L_a(h)}{2} = -\frac{3h+L}{4}, \\ y_\beta(h) &= -\frac{L_b(h)}{2} = -\frac{h+L}{4}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Korzystając z powyższych wzorów możemy wyznaczyć energię potencjalną obu części łańcucha w zależności od odległości $h$, względem punktu $y = -L/2$:

$$\begin{aligned} U_a(h) &= M_a(h)g\left(y_\alpha(h) + \frac{L}{2}\right) = \frac{Mg(L^2 - 4Lh + 3h^2)}{8L}, \\ U_b(h) &= M_b(h)g\left(y_\beta(h) + \frac{L}{2}\right) = \frac{Mg(L^2 - h^2)}{8L}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Sumując energię potencjalną obu części otrzymujemy całkowitą energię potencjalną:

$$U(h) = \frac{Mg(L-h)^2}{4L}. \tag{4.4}$$

Przy tej konfiguracji maksymalna wartość energii potencjalnej równa jest $U(0) = MgL/4$. Wartość minimalna, równa $U(L) = 0$, osiągana jest, gdy koniec łańcucha osiągnie minimalną pozycję ($h = L$). Energia kinetyczna części nieruchomej równa jest $T_b(h) = 0$. Całkowita energia kinetyczna łańcucha skupiona będzie w części spadającej. Jej wartość obliczyć można w następujący sposób:

$$T(h) = T_a(h) = \frac{M_a(h)v_c(h)^2}{2} = \frac{M(L-h)v_c(h)^2}{4L}, \tag{4.5}$$

gdzie wyrażenie $v_c(h)$ oznacza prędkość spadającej części łańcucha. Przyjmując, że w chwili początkowej koniec łańcucha znajduje się w pozycji $h = 0$, możemy dla tego układu sformułować prawo zachowania energii:

$$U_a(0) + U_b(0) = U_a(h) + U_b(h) + T_a(h), \tag{4.6}$$

które po wprowadzeniu zależności (4.3) i (4.5) przyjmuje zwięzłą postać:

$$\frac{1}{4}MgL = \frac{M(L-h)(gL - gh + v_c(h)^2)}{4L}. \tag{4.7}$$

Z powyższego równania w prosty sposób wyznaczyć można prędkość $v_c$, a następnie przyspieszenie $a_c$ oraz czas $t_c$ końca spadającego łańcucha, wyrażone jako funkcje $h$:

$$\begin{aligned} v_c(h) &= \sqrt{\left(1+\frac{L}{L-h}\right)gh}, \\ a_c(h) &= \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{L}{L-h}\right)^2\right)g, \\ t_c(h) &= \int_0^h \frac{ds}{v(h)} = \int_0^h \sqrt{\frac{L-s}{gs\,(2L-s)}}ds. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Po podstawieniu $v_c(h)$ do wzoru (4.5) otrzymujemy wartość energii kinetycznej spadającej części i zarazem całego łańcucha wyrażoną jawnie przez $h$:

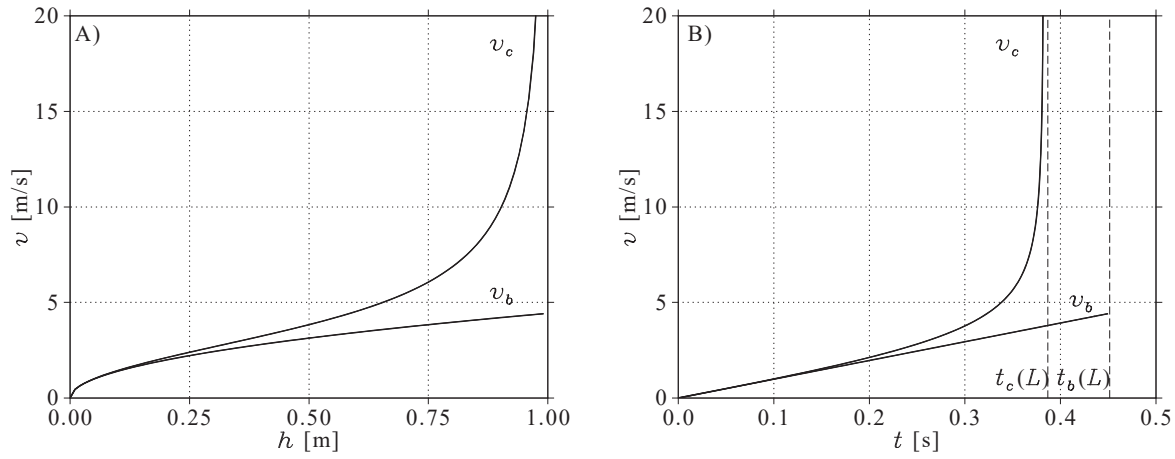
$$T(h) = \frac{Mgh(2L-h)}{4L}. \tag{4.9}$$

Z równań (4.8) wynika, że dla $h = L$ (dla łańcucha całkowicie rozciągniętego) prędkość $v_c(h)$ i przyspieszenie $a_c(h)$ końca łańcucha dążą do nieskończoności. Dla porównania podajemy odpowiednie równania dla spadku swobodnego ciała, wyrażone przez $h$:

$$\begin{aligned} v_b(h) &= \sqrt{2gh}, \\ a_b(h) &= g, \\ t_b(h) &= \sqrt{2h/g}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Rysunek 4.2 przedstawia porównanie prędkości spadającego łańcucha i swobodnie spadającego ciała. Obliczenia wykonano dla $L = 1\ m$ i przyspieszenia grawitacyjnego $g = 9,81\ m/s^2$. Dla tych danych czas spadku łańcucha i ciała wynosi odpowiednio $t_c(L) = 0,3825\ s$ i $t_b(L) = 0,4515\ s$. W pracy [12] autorzy wyznaczyli eksperymentalnie czas $t_c(L)$, dla którego koniec łańcucha osiąga minimalną pozycją $t_c(L) = 0,8472\ t_b(L)$. Widzimy zatem dużą godność wyników doświadczalnych z modelem analitycznym. Autorzy pokazali również, że wyniki eksperymentów są zgodne z modelem teoretycznym w przypadku, gdy $x_0$ nie przekracza wartości $0,05L$.

Rysunek 4.2 A) pokazuje, że prędkość końca łańcucha wyrażona przez zmienną $h$ jest w każdej chwili większa od prędkości swobodnie spadającego ciała. Wyjaśnianie zagadnienia



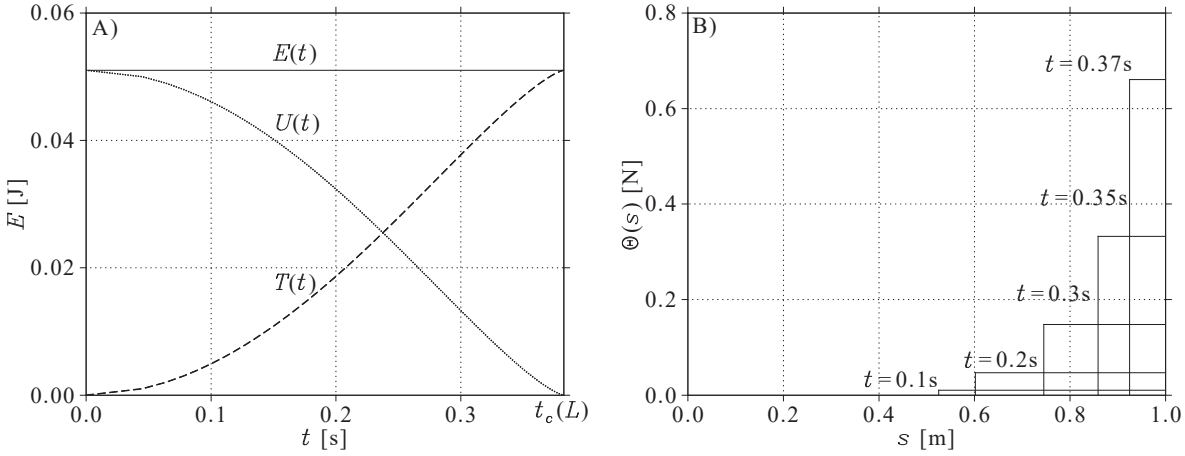

**Rysunek 4.2:** Prędkość końca łańcucha i swobodnie spadającego ciała. Prędkość końca łańcucha i swobodnie spadającego ciała oznaczone zostały odpowiednio przez $v_c$ i $v_b$. Rysunek A) przedstawia prędkości wyrażone jako funkcję zmiennej $h$, rysunek B) pokazuje wykresy prędkości w zależności od czasu $t$. Obliczenia wykonano dla łańcucha o długości $L = 1\ m$, spadającego z przyspieszeniem $g = 9,81\ m/s^2$.

spadku łańcucha zostało podane w wielu publikacjach. Przytoczymy objaśnienia podane we wspomnianej wcześniej pracy [14] oraz obrazowe wyjaśnienie, które zamieściliśmy w pracy [71]. Zaskakującą wartość osiąganą przez koniec łańcucha wyjaśnić można korzystając z wyników dla modelu analitycznego. W modelu tym łańcuch podzielony został na dwie części: część nieruchomą przymocowaną do podpory i część spadającą swobodnie. Początkowo, obie części mają jednakową długość i są nieruchome. Łańcuch ma pewną energię potencjalną i zerową energię kinetyczną. Gdy rozpoczyna się proces spadku, energia potencjalna maleje, a energia kinetyczna rośnie. Oczywiście, ze względu na zasadę zachowania energii, suma energii łańcucha pozostaje stała. Obrazuje to rysunek 4.3 A). Wiemy, że podczas spadku łańcucha, energia kinetyczna spadającej części zawiera się w coraz krótszym fragmencie łańcucha. Możemy to wyrazić przez funkcję gęstości energii kinetycznej $\Theta(s)$ określoną jako stosunek energii kinetycznej przypadającej na element długości. W modelu analitycznym

cała energia kinetyczna skupiona jest w części spadającej i funkcję tę możemy zapisać jako:

$$\Theta(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant s < \frac{L+h}{2} \\ \frac{Msg(2L-s)}{2L(L-s)}, & \frac{L+h}{2} \leqslant s < L \end{cases} . \tag{4.11}$$

Korzystając z obliczeń wykonanych powyżej możemy zobrazować efekt wzrostu energii końca łańcucha. Rysunek 4.3 B) przedstawia gęstość energii wzdłuż długości łańcucha $s$, dla kolejnych momentów czasu. Prezentujemy wyniki dla łańcucha o rzeczywistej długości $L = 1\ m$ i masie $M = 0,022\ kg$, który zastosowaliśmy w eksperymentach w następnym paragrafie 4.2. Ważnym faktem jest to, że masa spadającej części łańcucha zmniejsza się




**Rysunek 4.3:** Na rysunku A) pokazany został wykres energii całkowitej $E(t)$ (linia ciągła), energii potencjalnej $U(t)$ (linia punktowa) oraz energii kinetycznej $T(t)$ (linia przerywana) podczas spadku łańcucha. Rysunek B) przedstawia rozkład gęstości energii kinetycznej w wybranych chwilach. Obliczenia wykonano dla łańcucha o długości $L = 1\ m$, masie $M = 0,022\ kg$, spadającego z przyspieszeniem $g = 9,81\ m/s^2$.

w czasie. Gdy łańcuch rozprostowuje się, całkowita energia skupia się w jednym punkcie ($h = L$). Gęstość energii w tym punkcie jest nieskończona. W efekcie prędkość końca łańcucha w modelu analitycznym znacząco rośnie w końcowej fazie spadku dążąc do nieskończoności. Z rysunku 4.2 B) wnioskujemy, że przyspieszenie spadającego końca łańcucha jest większe

od $g$ i rośnie nieskończenie wraz z czasem. Możemy sformułować pytanie: co powoduje, że łańcuch spada z przyspieszeniem przekraczającym wartość przyspieszenia ziemskiego? W dalszej części przeprowadzimy analizę, która ułatwi zrozumienie tego zjawiska.

### 4.1.2. Analiza sił działających na zgięciu łańcucha

Podczas spadku łańcucha, na spadającą część łańcucha działa siła grawitacji, której wartość zależną od dystansu $h(t)$ zapisać możemy w następujący sposób:

$$F_g = \frac{M\,(L - h(t))\,g}{2L}. \tag{4.12}$$

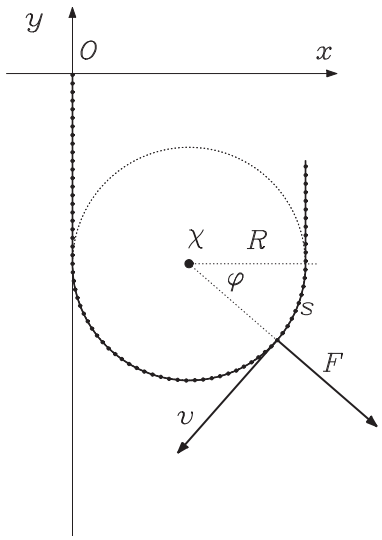
Koniec łańcucha spada jednak z przyspieszeniem większym co do wartości niż $g$. Na łańcuch musi więc działać dodatkowa siła, która powoduje wzrost przyspieszenia w końcowej fazie spadku. Siły tej poszukiwać będziemy w miejscu złączenia obu części łańcucha oznaczonego na rysunku 4.1 jako punkt $\chi$. Miejsce zgięcia, w którym łączą się obie części traktować będziemy jako półokrąg o promieniu $R$, którego środkiem jest punkt $\chi$. Schemat takiego połączenia obu części łańcucha podczas spadku przedstawiliśmy na rysunku 4.4.

Wyrażenie opisujące całkowitą wartość siły odśrodkowej, w ruchu łańcucha po półokrągłym zgięciu, można wyprowadzić wiążąc zmianę siły odśrodkowej $\mathrm{d}F = v^2\mathrm{d}m/R$ z przesunięciem kątowym $\mathrm{d}\varphi$. Zmianę masy $\mathrm{d}m = M/L\mathrm{d}s$ części spadającej wyznaczyć możemy przyjmując, że zmiana długości części spadającej równa jest $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\varphi$. Wstawiając, te zależności do wzoru określającego zmianę siły otrzymujemy:

$$\mathrm{d}F = \frac{v^2\mathrm{d}m}{R} = \frac{M}{L}\frac{v^2\mathrm{d}s}{R} = \frac{M}{L}v^2\mathrm{d}\varphi. \tag{4.13}$$

Z powyższego wzoru wynika, że siła odśrodkowa działająca w zgięciu łańcucha nie zależy od $R$. Zgięcie może być dowolnie małe, co jest zgodne z założeniami przyjętymi dla tego modelu. W zagadnieniu spadku łańcucha interesuje nas wartość pionowej składowej siły działającej na łańcuch. Wartość tę wyznaczyć można z prostych zależności trygonometrycznych:

$$\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\sin(\varphi) = \frac{M}{L}v^2\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi. \tag{4.14}$$




**Rysunek 4.4:** Schemat połączenia dwóch części łańcucha podczas spadku. Zgięcie łańcucha jest półokręgiem o środku $\chi$ i promieniu $R$. Na łańcuch przesuwający się po półokrągłym zgięciu z prędkością $v$ działa siła odśrodkowa $F$.

Całkowitą wartość siły działającej na zgięciu łańcucha, którą oznaczać będziemy jako $F_\chi$, otrzymujemy całkując $\mathrm{d}F_y$ po półokręgu:

$$F_\chi = \int_0^{-\pi} \mathrm{d}F_y = \frac{M}{L} v^2 \int_0^{-\pi} \sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi = 2\frac{M}{L} v^2. \tag{4.15}$$

Prędkość, która pojawia się w powyższym wzorze jest prędkością, z jaką opada punkt $\chi$. Prędkość tego punktu w czasie $t$ jest różna od prędkości opadania końca łańcucha. Rachunki pokazują, że prędkość ta jest połową prędkości opadania łańcucha $v_c(t)$. Siła $F_\chi$ równa będzie zatem:

$$F_\chi = \frac{M v_c(t)^2}{2L}. \tag{4.16}$$

Siła $F_\chi$ działa równocześnie na część opadającą zwiększając jej przyspieszenie oraz na część nieruchomą zwiększając ciężar odczuwany przez punkt zaczepienia. Siła działająca na część opadającą będzie zatem równa połowie siły $F_\chi$. Całkowita siła, która działa na część spadającą jest sumą siły wynikającej z grawitacji oraz połowy siły odśrodkowej działającej w

zgięciu łańcucha:

$$F_c = F_g + \frac{F_\chi}{2} = \frac{Mg\,(L - h(t))}{2L} + \frac{Mv_c(t)^2}{4L}. \tag{4.17}$$

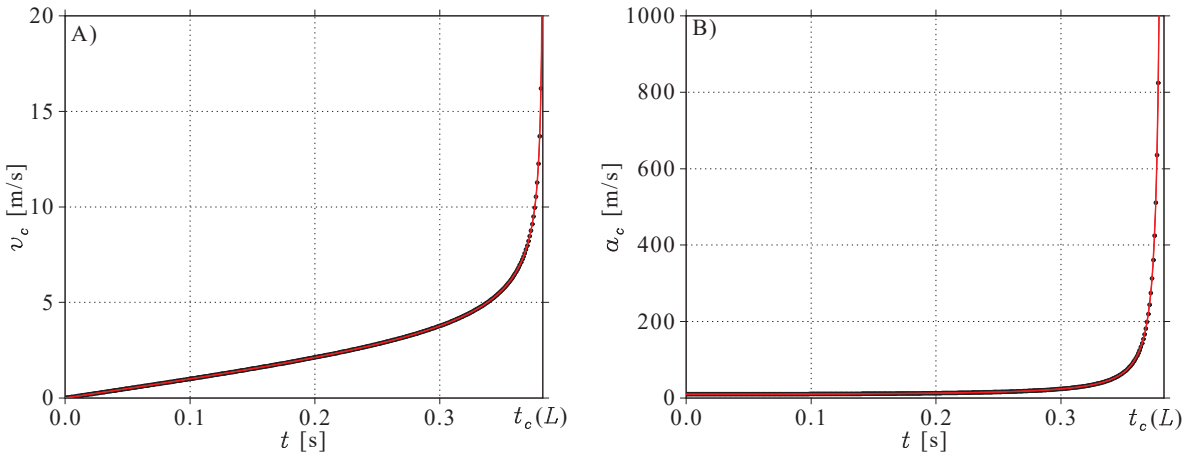
Znając siłę działającą na spadającą część łańcucha możemy sformułować równania ruchu opisujące spadek tej części. Jeżeli przyjmiemy, że $\dot{h}(t) = v_c(t)$ oraz $\ddot{h}(t) = a_c(t)$, wówczas równania ruchu końca łańcucha zapisać możemy w następujący sposób:

$$\begin{gathered} \frac{Mg\,(L - h(t))}{2L}\ddot{h}(t) = \frac{Mg\,(L - h(t))}{2L} + \frac{M\dot{h}(t)^2}{4L} \\ \Downarrow \\ \ddot{h}(t) = \frac{2gL - 2gh(t) + \dot{h}(t)^2}{2(L - h(t))} = g + \frac{\dot{h}(t)^2}{2(L - h(t))}. \end{gathered} \tag{4.18}$$

Powyższe równanie nie ma rozwiązania dokładnego i dlatego do jego rozwiązania wykorzystaliśmy metody numeryczne. Zagadnienie to rozwiązaliśmy dla warunków początkowych $h(0) = 0$ i $\dot{h}(0) = 0$. Wyniki porównaliśmy z rozwiązaniem analitycznym uzyskanym z zasady zachowania energii (4.8) i otrzymaliśmy pełną zgodność. Rysunek 4.5 przedstawia porównanie obu rezultatów.

Zgodność wyników uzyskanych w analizie energii i sił działających na łańcuch podczas spadku potwierdza hipotezę, że za wzrost przyspieszenia końca łańcucha odpowiedzialna jest wewnętrzna siła odśrodkowa działająca na łańcuch w zgięciu. Siła ta jest proporcjonalna do kwadratu prędkości końca łańcucha. Podobną analizę i wyniki przedstawiono w pracy [72]. Widzimy zatem, że wzrost prędkość końca, wynikający z zasady zachowania energii powoduje, że siła działająca w zgięciu również rośnie powodując, że łańcuch spada z przyspieszeniem większym niż $g$. Dodatkowo, na punkt zaczepienia łańcucha również działa siła większa, niż siła wynikająca z ciężaru łańcucha. Tym zagadnieniem zajmiemy się z rozdziale 6.

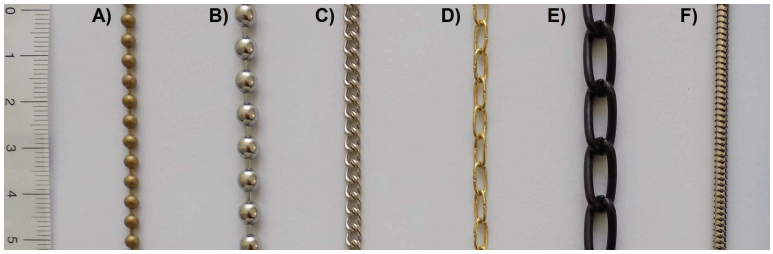
W modelu analitycznym, gdy koniec łańcucha osiągnie minimalne położenie $h = L$, prędkość i przyspieszenie końca dążą do nieskończoności. Ten wynik jest nierzeczywisty i wynika z założeń w przyjętym modelu. W rzeczywistości łańcuch składa się ze skończonej liczby elementów, co powoduje istotne zmiany w jego dynamice. W dalszej części przeprowadzimy eksperymenty i symulacje spadku złożonych łańcuchów i porównamy wyniki z wynikami analitycznymi.




**Rysunek 4.5:** Prędkość i przyspieszenie końca łańcucha złożonego. Na rysunku A) porównano prędkość a na rysunku B) przyspieszenie końca łańcucha, obliczone z zasady zachowania energii (linia ciągła w kolorze czerwonym) z wynikami uzyskanymi z analizy sił działających na łańcuch (punkty w kolorze czarnym). Obliczenia wykonano dla łańcucha o długości $L = 1\ m$, spadającego z przyspieszeniem $g = 9,81\ m/s^2$.

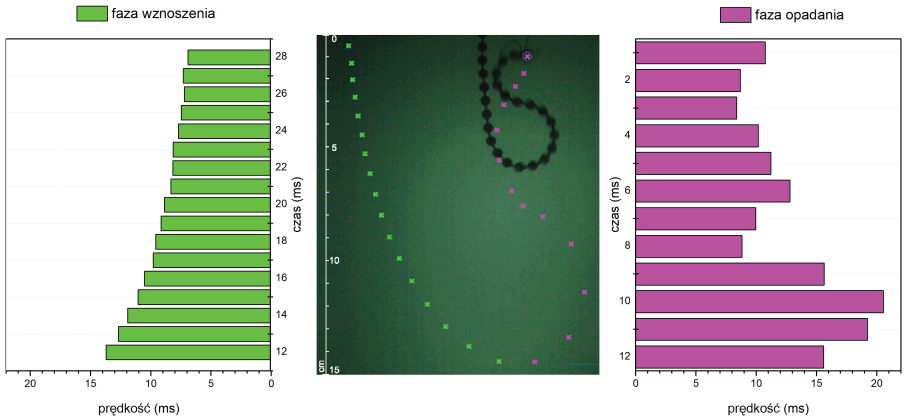
## 4.2. Eksperymenty dla łańcucha złożonego

W doświadczeniach ze spadającym łańcuchem zastosowano łańcuchy o różnej budowie i właściwościach. Rysunek 4.6 przedstawia łańcuchy, dla których wykonano doświadczenia.W badaniach eksperymentalnych wykorzystano ultraszybką kamerę OLYMPUS i-SPEED 2, pozwalającą na rejestrację obrazu poruszającego się przedmiotu z szybkością ponad 1000 klatek na sekundę. W celu śledzenia trajektorii ruchu końców badanych łańcuchów zastosowano szybkości rejestracji obrazu równe 1000 i 2000 klatek na sekundę oraz czasy ekspozycji $200\mu s$. Tak dobrane parametry pozwoliły na uzyskanie wyraźnego obrazu dla końca łańcucha również w momencie gdy poruszał się on z największą prędkością. Naturalną konsekwencją zwiększania liczby klatek rejestrowanych na sekundę oraz skracania czasu ekspozycji, w celu wyeliminowania efektu rozmycia obrazu poruszającego się obiektu, jest gwałtowny spadek




**Rysunek 4.6:** Łańcuchy zastosowane w doświadczeniach. Do dalszych eksperymentów wybrany został łańcuch A).

ilości światła jaka dociera i jest rejestrowana przez matrycę kamery. Aby umożliwić rejestrowanie obrazów z dostatecznie dużą szybkością, konieczne jest stworzenie odpowiednich warunków oświetleniowych, zapewniających dostatecznie silny strumień światła padającego i odbijającego się od badanego przedmiotu. Na potrzeby eksperymentu, polegającego na rejestracji obrazów poklatkowych spadającego łańcucha, wykonano specjalną komorę zapewniającą odpowiednie oświetlenie planu, na którym filmowano ruch końca spadającego łańcucha. Wykorzystano lampę pierścieniową umieszczoną za filmowanym obiektem, warstwę dyfuzyjną rozpraszającą światło oraz cztery dodatkowe punktowe źródła światła oświetlające obiekt diagonalnie w celu eliminacji cieni. W doświadczeniach ze spadającym łańcuchem zastosowano łańcuch kulkowy oznaczony na rysunku 4.6 jako A) o długości $L = (1 \pm 0,03)m$. W tym rozdziale przeanalizowano spadek łańcucha z końcami wiszącymi w tej samej płaszczyźnie i nieznacznie oddalonymi od siebie. W ten sposób będzie można porównać wyniki z tymi otrzymanymi dla modelu analitycznego. W eksperymentach laboratoryjnych zastosowano łańcuch mosiężny o długości $L = 1\ m$ i masie $M = 0,022\ kg$, składający się z 225 segmentów. Łańcuch ten składa się ze sferycznych ogniw o średnicy $3,6 \times 10^{-3}m$, a odległość miedzy ogniwami wynosi $4,4 \times 10^{-3}$ m. Jeden z jego końców przymocowano za pomocą nici do punku wsparcia oznaczonego przez $O$. To sprawiło, ze możliwy jest jego obrót wokół punktu podparcia. Drugi koniec łańcucha, oznaczony przez $P$, zamocowano na tym samym poziomie co punkt O za pomocą widełek, które łatwo można wysunąć. W trakcie przeprowadzania doświadczenia zbliżając oba końce możliwie blisko, okazało się, ze podczas

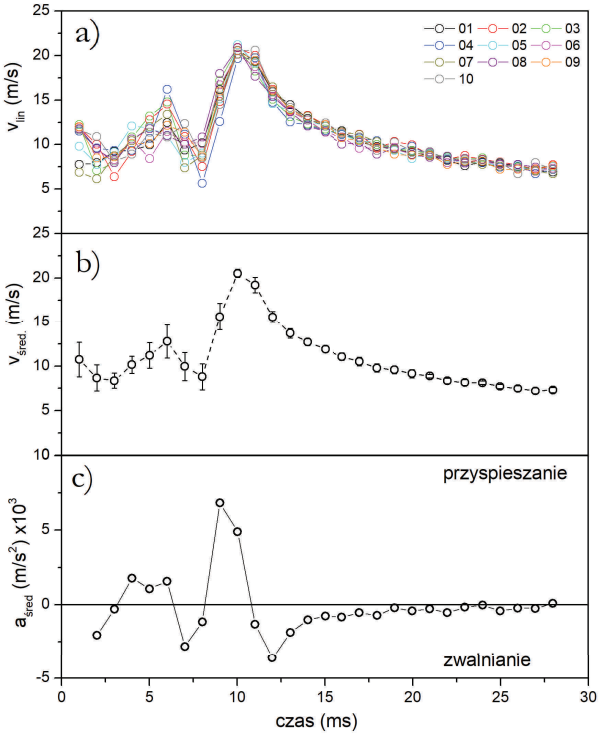



**Rysunek 4.7:** Eksperyment spadku łańcucha złożonego. Trajektoria spadającego łańcucha rejestrowana co 1 $ms$ w ostatniej fazie spadku (rysunek środkowy) oraz odpowiadające jej histogramy rozkładu prędkości ostatniego ogniwa łańcucha w fazie opadania (kolor fioletowy), w fazie wznoszenia (kolor zielony).

spadku część spadająca i część nieruchoma stykają się, zakłócając ruch. Eksperymentalnie wyznaczono, że bezpieczna odległość (końce łańcucha nie obijają się o siebie podczas spadku) pomiędzy końcami wynosi $0,03$ $m$. Po wytłumieniu drgań łańcucha, koniec zawieszony w punkcie P zostaje zwolniony. Szybkość 1000 klatek na sekundę pozwoliła wykorzystać maksymalną powierzchnię i rozdzielczość matrycy kamery, co przekłada się na najszerszy możliwy do zarejestrowania przez kamerę kadr. Dzięki temu możliwe było śledzenie końca łańcucha w najszerszym ujęciu. Rejestracja obrazów z szybkością 2000 klatek na sekundę pozwoliła na dokładniejszą analizę ruchu końca łańcucha w decydującej fazie ruchu. Na podstawie uzyskanych obrazów wyznaczono:

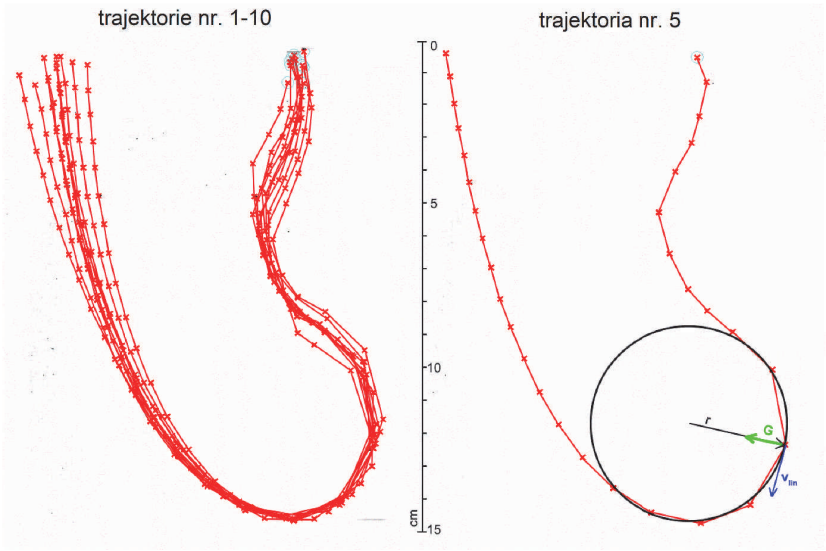
- prędkości liniowe ($V_{lin}$) w końcowej fazie opadania i początkowej fazie wznoszenia,
- przyspieszenie chwilowe działające na ostatnie ogniowo w łańcuchu,
- krzywiznę toru (trajektorię) po jakim się poruszał punkt kontrolny.

Następnie porównano wyniki uzyskane dla obu serii pomiarowych zarejestrowanych z szybkościami 1000 i 2000 klatek na sekundę. Na rysunku 4.7 przedstawiono przykładową trajektorię ruchu ostatniego ogniwa w łańcuchu dla kadru rejestrowanego z prędkością 1000



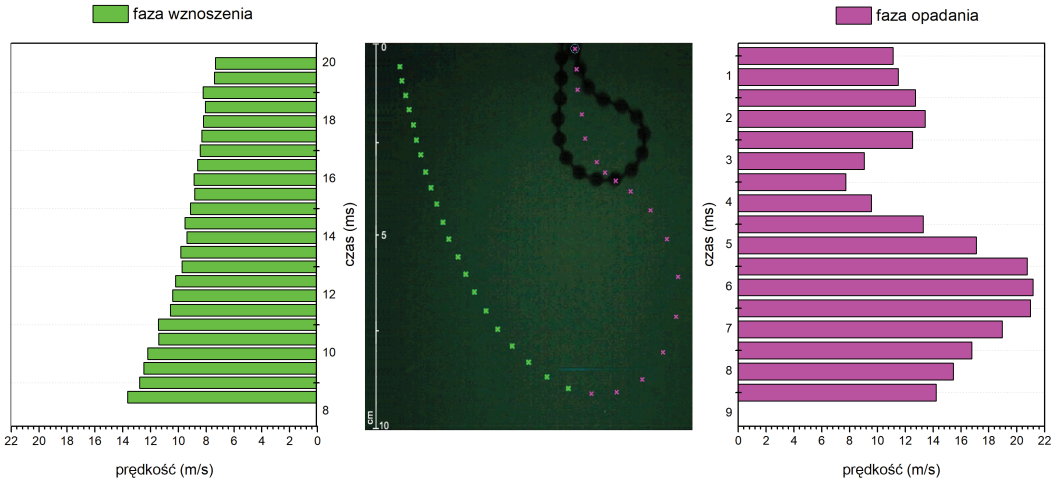

**Rysunek 4.8:** Rozkład prędkości liniowej (a), wartości średniej prędkości liniowej (b) oraz przyspieszenia liniowego (c) ostatniego ogniwa łańcucha dla 10 kolejnych prób (rejestracja co 1 $ms$).

klatek na sekundę, z podziałem na fazę opadania i wznoszenia się końca łańcucha oraz wyznaczonymi prędkościami liniowymi. Kluczowym, z punktu widzenia obliczeń teoretycznych, momentem eksperymentu jest etap, w którym swobodnie opadający koniec łańcucha osiąga prędkość maksymalną ($V_{max}$). Z tego względu wykorzystując ultraszybki tryb nagrywania kamery zarejestrowano 30 milisekundowy przedział czasowy w którym łańcuch ulega całkowitemu rozwinięciu osiągając w pewnym momencie prędkość maksymalną. Dodatkowo wyznaczono tor ruchu ostatniego ogniwa łańcucha i punkt, w którym osiągana jest prędkość $V_{max}$. Zarejestrowanie dziesięciu prób spadku łańcucha oraz analiza otrzymanych danych pokazały, że ruch odbywa się po zbliżonych trajektoriach, a parametry ruchu różnią się nieznacznie pomiędzy kolejnymi próbami. Rysunek 4.8 pokazuje zarejestrowane prędkości




**Rysunek 4.9:** Przebieg trajektorii po której porusza się ostatnie ogniwo łańcucha zarejestrowane w 10 kolejnych przebiegach (rejestracja co 1 $ms$). Wyznaczenie parametrów ruchu ($r$, $V_{lin}$) dla przykładowej trajektorii w momencie uzyskania przez ogniowo łańcucha, maksymalnej prędkości.

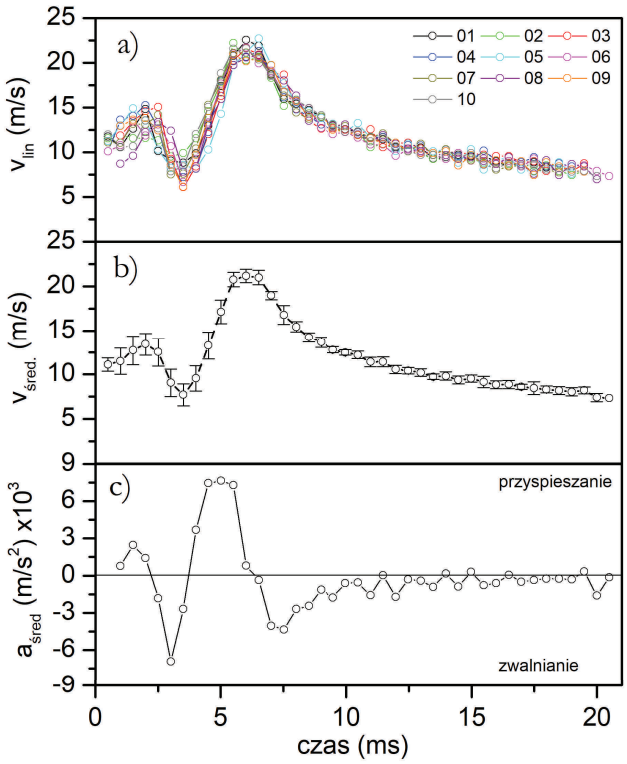
ruchu ostatniego ogniwa w łańcuchu oraz przyspieszenie chwilowe w kolejnych fazach spadku. Maksymalna średnia prędkość jaką wyznaczono eksperymentalnie wyniosła 20,54 m/s z błędem rzędu 4 %, co dobrze zgada się z wartością wyznaczoną teoretycznie w Modelu B. Na rysunku 4.9 przedstawiono trajektorie ruchu zakreślane przez ostatnie ogniwo w łańcuchu oraz okrąg, po którym porusza się punkt uzyskując maksymalną prędkość liniową. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń wyznaczono średni promień trajektorii ruchu, który wyniósł $2,663 \times 10^{-2}$ $m$. Siła dośrodkowa działająca na ostatnie ogniwo w łańcuchu wynosi zatem $1,55$ $N$ natomiast ciężar spoczynkowy wynosi $9,6 \times 10^{-4}$ $N$. Analizując uzyskane zależności stwierdzono, że w momencie gdy ostatnie ogniwo uzyskuje maksymalną prędkość, rejestracja obrazów w odstępach czasowych 1ms nie pozwala na dokładną analizę ruchu i w efekcie uniemożliwia zarejestrowanie maksymalnej prędkości jaką uzyskuje łańcuch. Dlatego przeprowadzono drugą serię badań zwiększając ilość rejestrowanych klatek na sekundę do 2000. Rysunek 4.10 przedstawia przykładową trajektorię ruchu ostatniego ogniwa w łańcuchu w odstępach 500 $\mu s$ wraz z wyznaczonymi prędkościami w fazie opadania i wznoszenia.



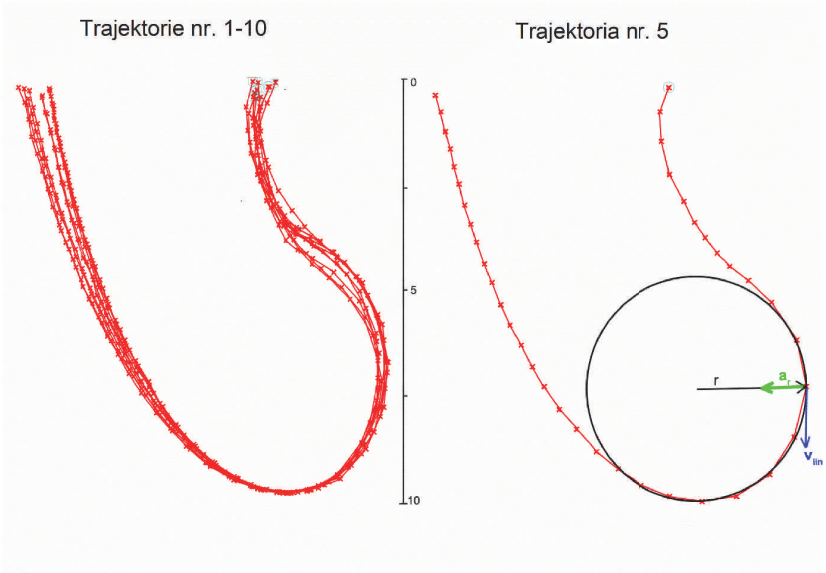

**Rysunek 4.10:** Eksperyment spadku łańcucha złożonego. Trajektoria spadającego łańcucha rejestrowana co 500 $\mu s$ w ostatniej fazie spadku (rysunek środkowy) oraz dopowiadającej jej histogramy rozkładu prędkości ostatniego ogniwa łańcucha w fazie opadania (kolor fioletowy), w fazie wznoszenia (kolor zielony).

Rysunek 4.11 przedstawia rozkład prędkości oraz przyspieszeń uzyskiwanych przez ostatnie ogniwo łańcucha pod koniec fazy spadku i na początku fazy wznoszenia. Dokładniejsza rejestracja wykazała, że maksymalna średnia prędkość jaką uzyskuje ostatnie ogniwo łańcucha podczas spadku swobodnego z wysokości 1 $m$ wynosi $21,16$ $m/s$ z błędem rzędu 3 %, tym samym otrzymano lepszą zgodność z wynikami obliczeń teoretycznych zarówno $ModeluA$ jak i $ModeluB$.

Na rysunku 4.12 przedstawiono trajektorie ruchu zakreślane przez ostatnie ogniwo w łańcuchu oraz okrąg, po którym porusza się punkt uzyskując maksymalną prędkość liniową. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń wyznaczono średni promień trajektorii ruchu, który wyniósł $2,691 \times 10^{-2}$ $m$. Siła dośrodkowa działająca na ostatnie ogniwo w łańcuchu wynosi zatem $1,63$ $N$ natomiast ciężar spoczynkowy wynosi $9,6 \times 10^{-4}$ $N$ .

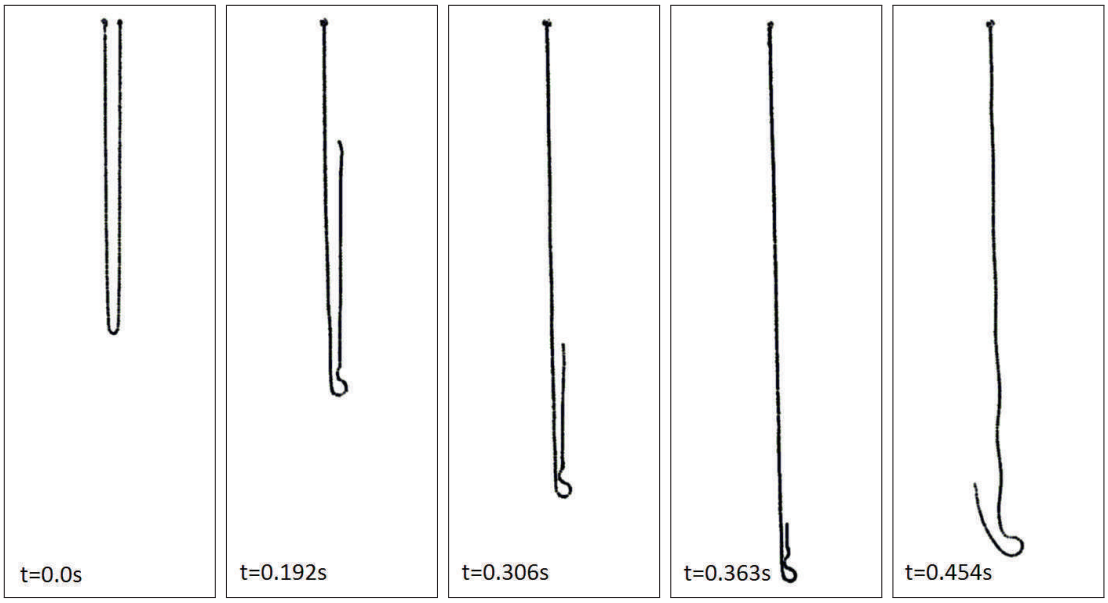



**Rysunek 4.11:** Rozkład prędkości liniowej (a), wartości średniej prędkości liniowej (b) oraz przyspieszenia liniowego (c) ostatniego ogniwa łańcucha dla 10 kolejnych prób (rejestracja co 500 $\mu s$).




**Rysunek 4.12:** Przebieg trajektorii ruchu ostatniego ogniwa łańcucha w 10 kolejnych przebiegach (rejestracja co 500 $\mu s$). Wyznaczenie parametrów ruchu ($r$, $V_{lin}$) dla wybranej trajektorii w momencie uzyskania przez ogniowo łańcucha, maksymalnej prędkości.

W celu uchwycenia spadku całego łańcucha, zarejestrowano także obrazy z prędkością do 480 klatek na sekundę. Eksperyment spadku takiego łańcucha wykonany został wielokrotnie w celu rejestracji położenia łańcucha w różnych chwilach. Wyznaczono, że koniec łańcucha osiąga maksymalną prędkość po czasie $t = 0,38\ s$. Wyniki obserwacji przedstawia rysunek 4.13. Jasność i kontrast zarejestrowanych zdjęć zostały poprawione, a tło zostało usunięte. W dalszej części zostaną przeprowadzone symulacje komputerowe odpowiadające doświadczeniom oraz porównanie wyniki otrzymane numerycznie z wynikami obliczeń analitycznych i eksperymentu.




**Rysunek 4.13:** Eksperyment spadku złożonego łańcucha. Rysunki przedstawiają konfiguracje spadającego łańcucha w następujących po sobie chwilach. W eksperymencie zastosowano łańcuch kulkowy o długości $L = 1\ m$ i masie $M = 0,022\ kg$. W chwili początkowej odległość między końcami łańcucha wynosiła $0,03\ m$.

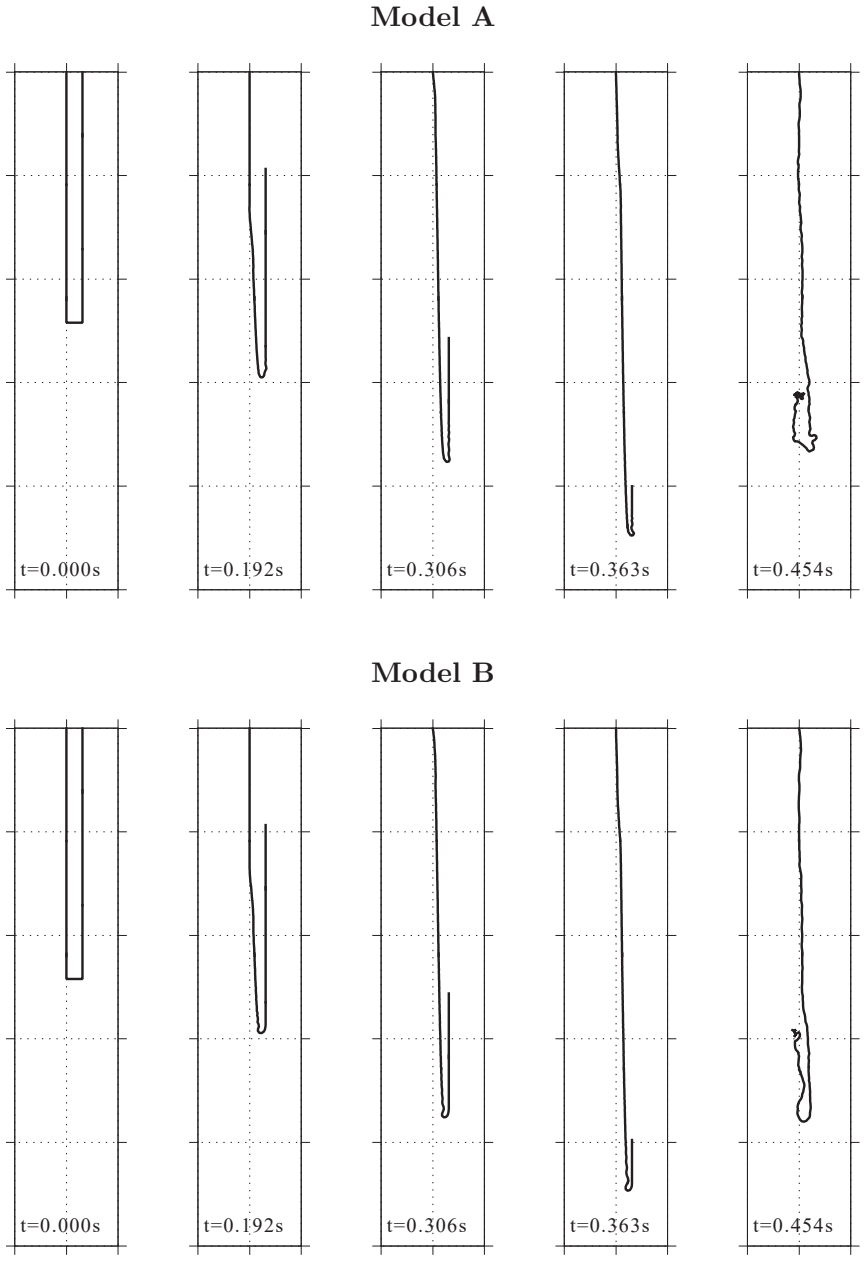
## 4.3. Symulacje numeryczne spadku łańcucha złożonego

### 4.3.1. Łańcuch idealny początkowo złożony

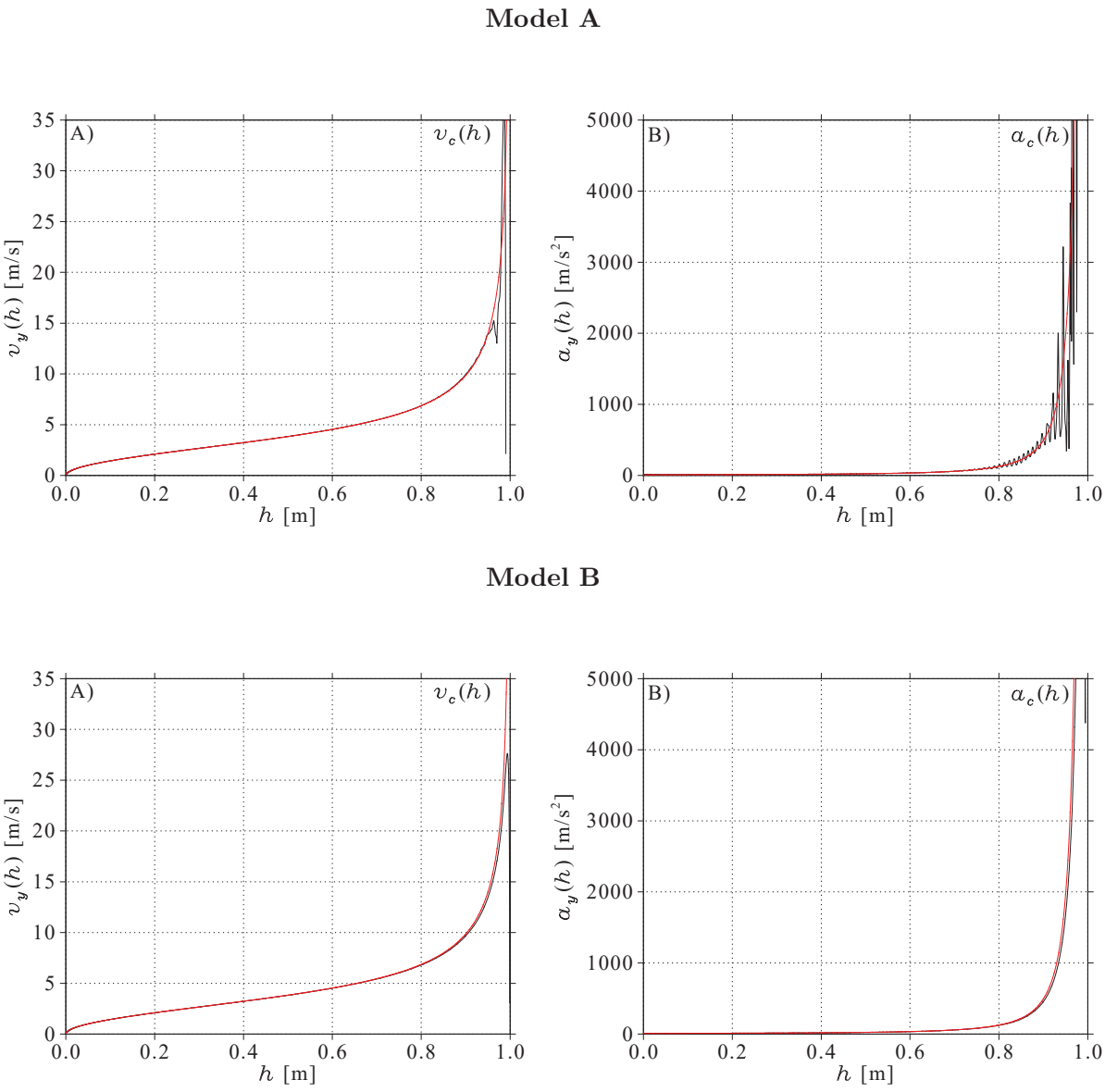
Kształt wiszącego rzeczywistego łańcucha, którego końce znajdują się na tym samym poziomie w bliskiej odległości, znacząco odbiega od kształtu krzywej łańcuchowej. Dzieje się tak ze względu na budowę segmentów łańcucha i niemożność całkowitego zgięcia ogniw. Dodatkowo widzimy, że dla łańcucha z nieparzystą liczbą ogniw i z końcami wiszącymi na tym samym poziomie, środkowe ogniwo leży w płaszczyźnie poziomej. Jako pewne uproszczenie, możemy przejąć zatem, że łańcuch będzie składał się z dwóch dokładnie pionowych części połączonych poziomym segmentem. Taki kształt początkowy został użyty w pracy [14]. W naszym eksperymencie wykonamy podobne obliczenia dla łańcucha o długości $L = 1\ m$, składającego się z $n = 225$ ogniw, ale konfigurację początkową łańcucha stanowić będą dwie pionowe

części połączone siedmioma segmentami. W tym przypadku przybliżona długość środkowej części będzie wynosiła $x_0 = 0,0311\ m$ i będzie porównywalna do tej, która została zastosowana w eksperymencie 4.2. Przy tych danych wejściowych wykonaliśmy obliczenia stosując równaniu ruchu dla *Modelu A* i *Modelu B* z parametrami $g = 9,81\ m/s^2$, $k = 0$ i $r = 0$ (*łańcuch idealny*). Na wykresach 4.14 zostały przedstawione rezultaty obliczeń dla łańcucha złożonego, gdy dwie pionowe części połączone są przez siedem segmentów. Zastosowanie mniejszej liczby segmentów nie zmienia znacząco wyników, pogarszają się za to możliwości prezentacji wyników. Dla porównania z wynikami eksperymentalnymi wyniki prezentujemy dla tych samych czasów.

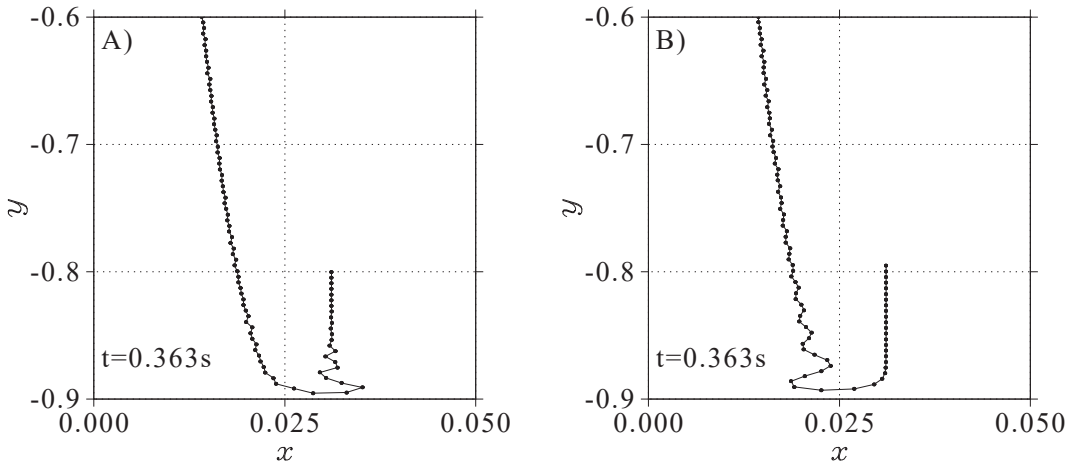
Na rysunkach 4.15 przedstawiających prędkość i przyspieszenie końca łańcucha podczas spadku, widzimy, że aż do osiągnięcia pozycji $h \approx 0,9L$ zgodność z obliczeniami dla modelu analitycznego jest bardzo duża. Na wykresach prędkości dla eksperymentów numerycznych widzimy wyraźne maksimum, gdy łańcuch jest bardzo bliski całkowitego rozciągnięcia. Maksimum prędkości dla *Modelu A* wynosi $36,6867\ m/s$ i występuje dla $t = 0,3819\ s$, wcześniej niż $t_c(L)$. Dla *Modelu B* maksimum to jest znacznie mniejsze, równe $27,6884\ m/s$ i pojawia się dla dla $t = 0,3833\ s$, nieco później niż $t_c(L)$. Na wykresach zaobserwowaliśmy również, że wyniki dla *Modelu B* są bliższe rezultatom otrzymanym dla modelu analitycznego niż w przypadku *Modelu A*. Dla *Modelu A* w końcowej fazie spadku, na wykresie prędkości i w szczególności wykresie przyspieszenia, pojawiają się silne oscylacje. Ten fakt wynika z definicji *Modelu A*, w którym zakłada się, że energia kinetyczna jest sumą energii translacyjnej i rotacyjnej. W rezultacie, w symulacji łańcucha dla *Modelu A*, w obu częściach łańcucha (spadającej i zatrzymanej), w pobliżu punktu zgięcia wzbudzają się drgania, których amplituda rośnie wraz czasem. W części zatrzymanej amplituda drgań jest znacznie mniejsza. W przeciwieństwie do *Modelu A*, w *Modelu B* drgania pojawiają się tylko w części zatrzymanej. Rysunek 4.16 pokazuje fragment łańcucha w chwili $t = 0,363\ s$ dla obu modeli, gdy koniec łańcucha bliski jest osiągnięcia pozycji minimalnej. Rysunek został znacznie poszerzony w osi $x$ w celu uwypuklenia szczegółów. Szczegółową analizą związaną z dyskretyzacją modelu zajmiemy się w dalszej części.




**Rysunek 4.14:** Symulacja spadku łańcucha złożonego o długości $L = 1\ m$, masie $M = 0,022\ kg$ i składającego się z $n = 255$ ogniw. Konfigurację początkową stanowiły dwie pionowe części połączone poziomą częścią o długości $x_0 = 0,0311\ m$. Górna część przedstawia wyniki dla *Modelu A* a dolna dla modelu *Modelu B*. Rysunki przedstawiają kształt spadającego łańcucha dla tych samych czasów co na rysunku 4.13.




**Rysunek 4.15:** Prędkość A) i przyspieszenie B) spadającego końca łańcucha o długości $L = 1\ m$, masie $M = 0,022\ kg$ i składającego się z $n = 255$ ogniw. Kształt początkowy łańcucha to dwie pionowe części połączone poziomą częścią o długości $x_0 = 0,0311\ m$. Górna część przedstawia wyniki dla *Modelu A* a dolna dla modelu *Modelu B*. Linia czarna przedstawia wyniki otrzymane w symulacji, linia czerwona reprezentuje rezultaty otrzymane z modelu analitycznego.

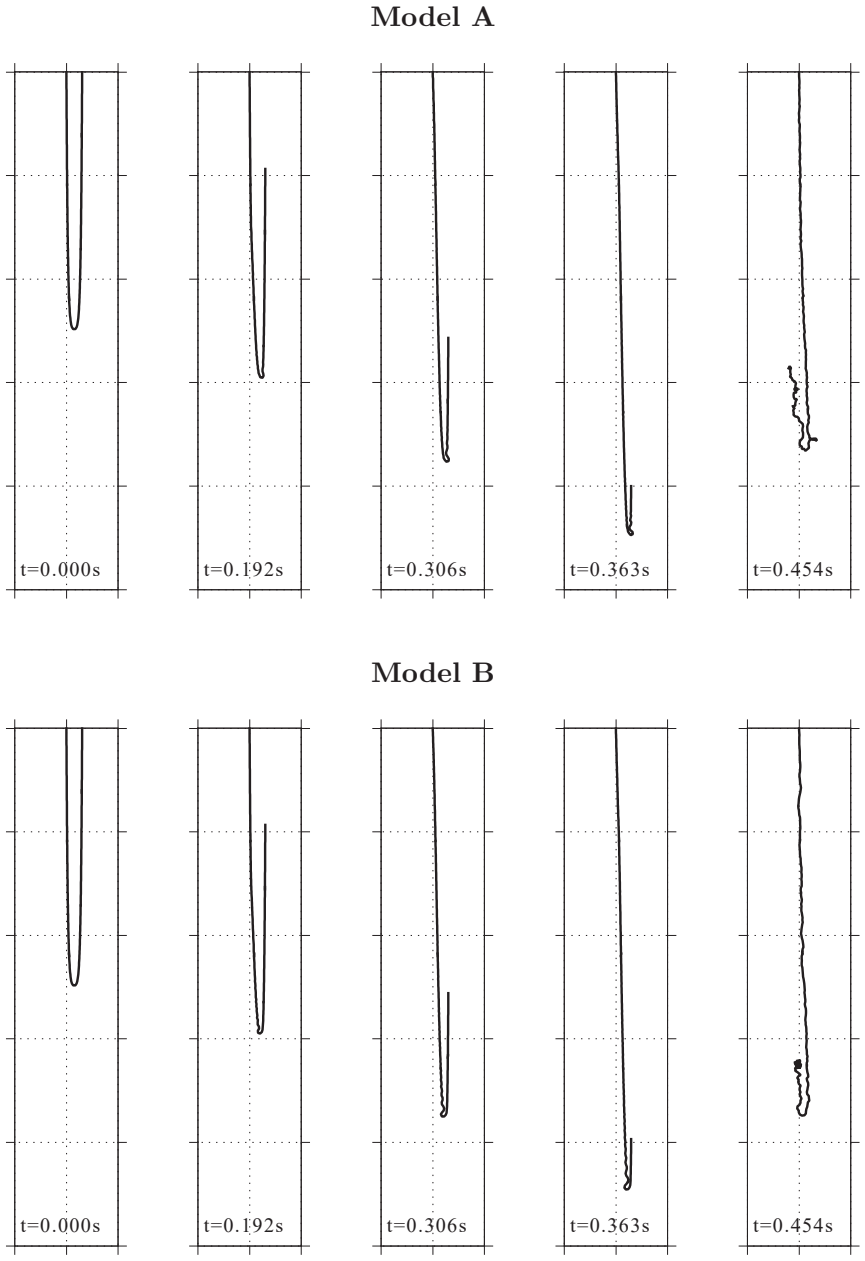



**Rysunek 4.16:** Drgania wzbudzone podczas spadku łańcucha początkowo zgiętego. Rysunek A) przedstawia koniec łańcucha w chwili $t = 0,363\ s$ uzyskany dla *Modelu A* a rysunek B) dla *Modelu B*. W celu prezentacji szczegółów, rysunki zostały poszerzone w osi $x$ w skali 6:1.

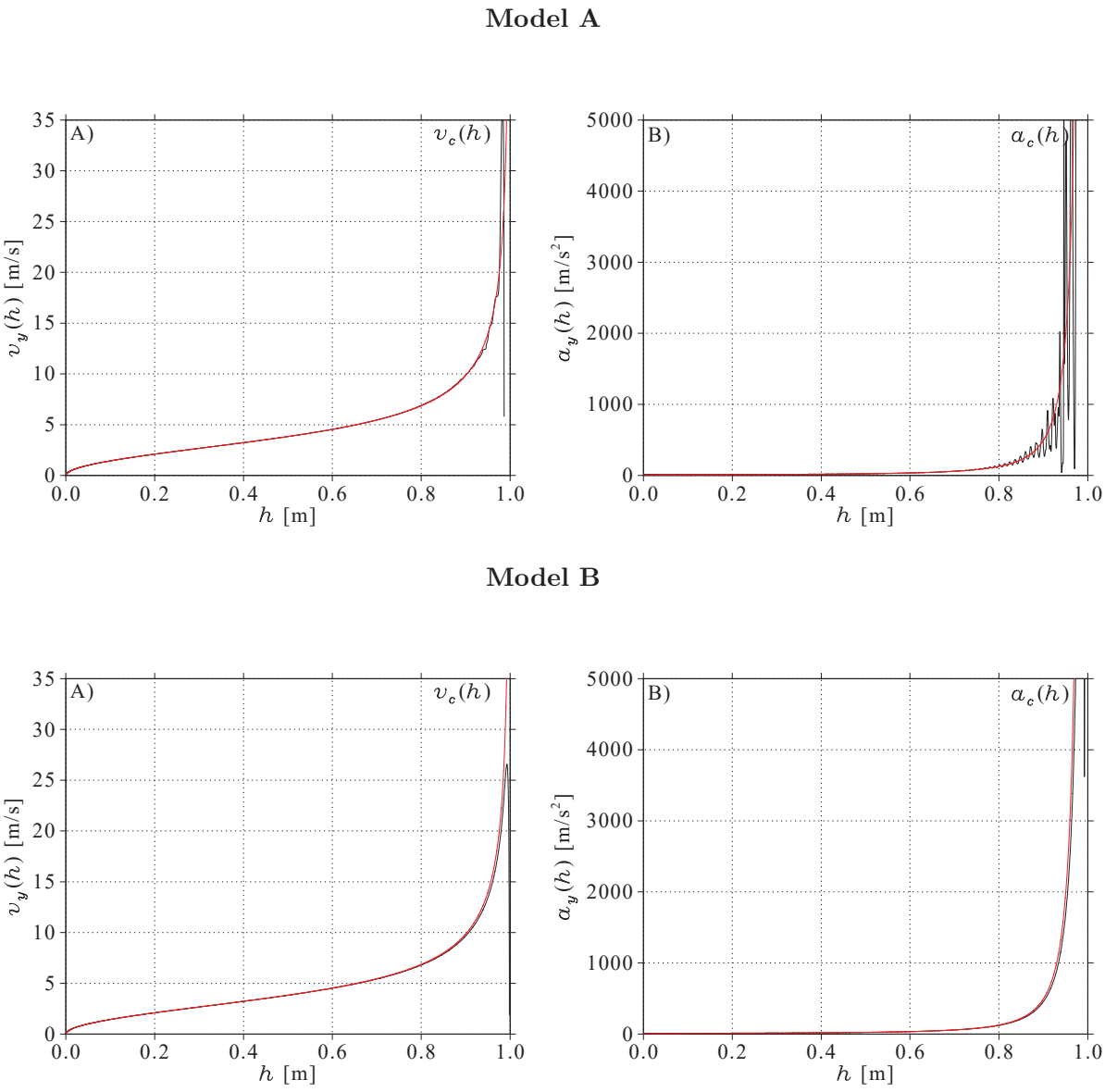
### 4.3.2. Łańcuch idealny początkowo wiszący swobodnie

Sprawdzimy dalej jak przebiega symulacja dla przypadku, gdy łańcuch wisi swobodnie. Jako początkowy kształt przyjmiemy zatem przybliżoną krzywą łańcuchową z końcami łańcucha odległymi o $x_0 = 0,03\ m$. Pozostałe parametry symulacji pozostawiamy takie same jak w przypadku łańcucha złożonego. Rysunki 4.17 oraz 4.18 przedstawiają rezultaty obliczeń dla spadku tego łańcucha.

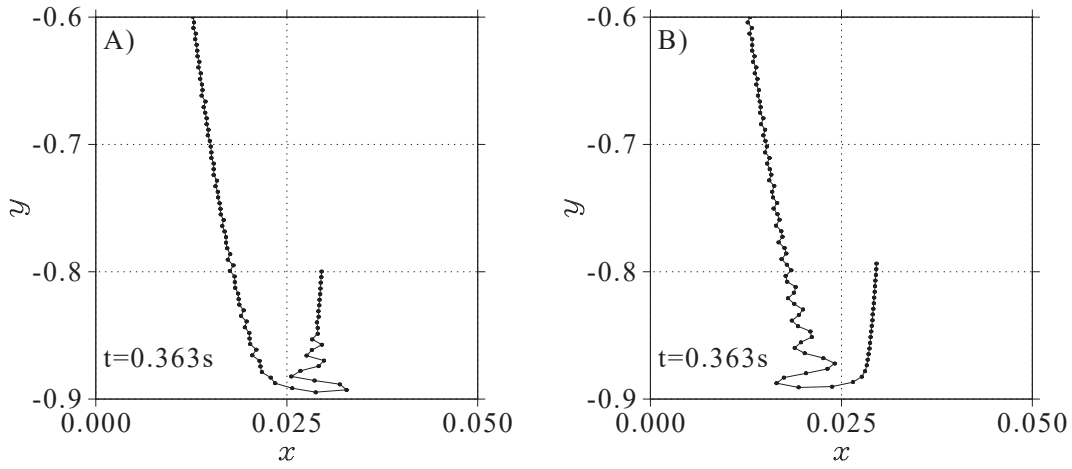
Na wykresach widzimy bardzo duże podobieństwo wyników do tych otrzymanych w poprzednim paragrafie dla symulacji łańcucha złożonego. Maksymalna prędkość otrzymana dla *Modelu A* wynosi $37,3782\ m/s$ i została osiągnięta dla $t = 0,3817\ s$. Dla *Modelu B* otrzymaliśmy maksymalną prędkość równą $26,5812\ m/s$ w chwili $t = 0,3835\ s$. W symulacjach obserwujemy podobne drgania jak w przypadku, gdy początkowo łańcuch był złożony z dwóch prostopadłych części. Te drgania są więc cechą modelu i nie wynikają ze specyfiki warunków początkowych. Podobnie, jak w przypadku łańcucha złożonego, porównaliśmy kształt końca dla obu modeli w końcowej fazie spadku łańcucha. Wyniki przedstawia rysunek 4.19. W obu przypadkach obserwujemy podobne drgania jak w poprzedniej symulacji.




**Rysunek 4.17:** Symulacja spadku łańcucha o długości $L = 1\ m$, masie $M = 0,022\ kg$ i składającego się z $n = 255$ ogniw. Kształt początkowy łańcucha stanowiła dyskretna krzywa łańcuchowa o końcach wiszących na jednym poziomie i odległych o $x_0 = 0,03\ m$. Górna część przedstawia wyniki dla *Modelu A*, a dolna dla modelu *Modelu B*. Rysunki przedstawiają konfiguracje spadającego łańcucha dla tych samych czasów co na rysunku 4.13.




**Rysunek 4.18:** Prędkość A) i przyspieszenie B) spadającego końca łańcucha o długości $L = 1\ m$, masie $M = 0,022\ kg$ i składającego się z $n = 255$ ogniw. Konfigurację początkową stanowiła dyskretna krzywa łańcuchowa z końcami oddalonymi o $x_0 = 0,03\ m$. Górna część przedstawia wyniki dla *Modelu A*, a dolna dla modelu *Modelu B*. Linia czarna przedstawia wyniki otrzymane w symulacji, linia czerwona reprezentuje rezultaty otrzymane z modelu analitycznego.




**Rysunek 4.19:** Drgania wzbudzone podczas spadku łańcucha, którego początkowym kształtem była krzywa łańcuchowa o końcach odległych o $x_0 = 0,03\ m$. Rysunek A) przedstawia koniec łańcucha w chwili $t = 0,363\ s$ uzyskany dla *Modelu A* a rysunek B) dla *Modelu B*. W celu prezentacji szczegółów, rysunki zostały poszerzone w osi $x$ w skali 6:1.

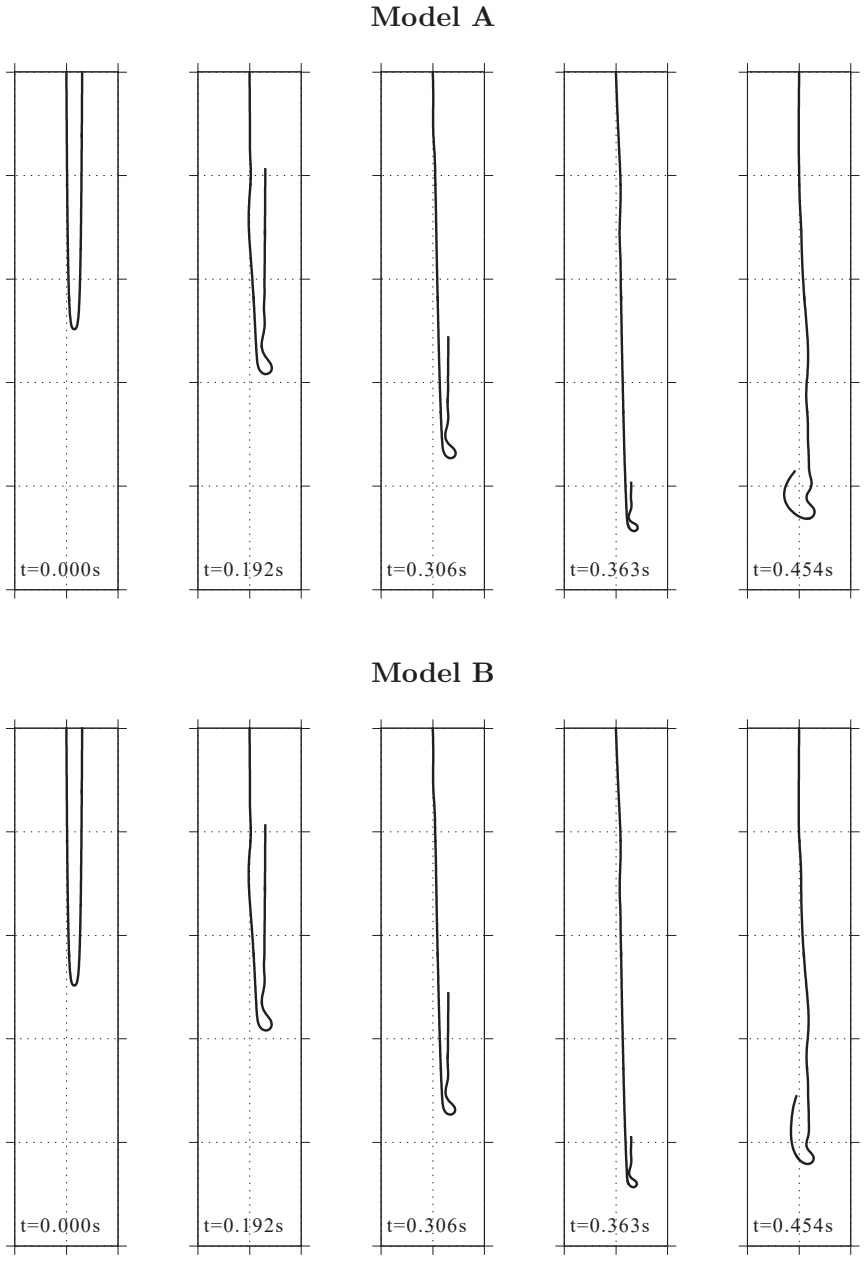
### 4.3.3. Łańcuch rzeczywisty początkowo wiszący swobodnie

W tej części wykonamy symulacje dla łańcucha rzeczywistego, których celem jest możliwie dokładne przybliżenie przebiegu eksperymentu 4.2. Symulacje dla łańcucha realnego wymagają uwzględnienia tłumienia i sprężystości pomiędzy segmentami. Parametr określający tłumienie złącz wybraliśmy bazując na obliczeniach zaprezentowanych w pracy [73]. W pracy tej wyznaczona została wartość parametru tłumienia $r = 2,163 \times 10^{-5}\ Nms$, dla którego rozwiązanie numeryczne było zgodne z doświadczeniem laboratoryjnym dla łańcuchów o początkowym rozwarciu $x_0 > 0,1\ m$. Szczegóły związane z wyznaczeniem parametru tłumienia omówione będą w części 5.2. Jak się okazało symulacje przeprowadzone z uwzględnieniem tłumienia dla łańcucha silnie złożonego z $x_0 = 0,03\ m$ nadal odbiegały od wyników doświadczalnych. Przeprowadziliśmy więc szereg dodatkowych obliczeń z uwzględnieniem sprężystości. Obliczenia pokazały, że najlepsze rezultaty otrzymaliśmy dla rozszerzonego modelu sprężystości, opisanego w części 2.5.1, z parametrem $\alpha = 0,7$ i współczynnikiem sprężystości $k = 1,251 \times 10^{-4}\ Nm$. Rysunek 4.20 prezentuje wyniki obliczeń dla *łańcucha realnego* (z

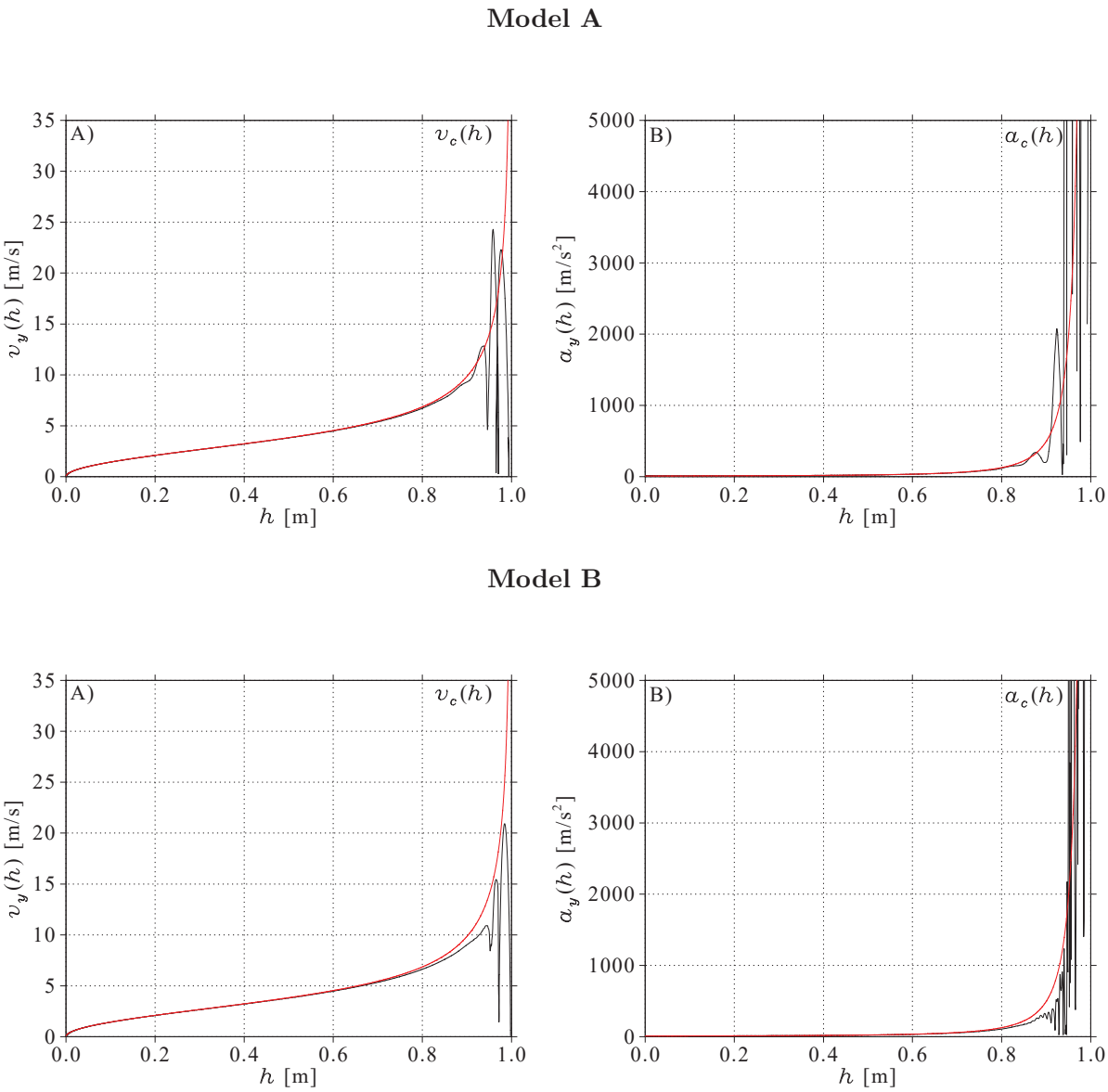
uwzględnieniem sprężystości i dyssypacji pomiędzy ogniwami). Na wykresach 4.21 pokazane zostały prędkość i przyspieszenie otrzymane w tej symulacji.

Porównanie rysunków 4.20 i 4.13 potwierdza zgodność wyników otrzymanych z symulacji z danymi doświadczalnymi. Możemy zatem przyjąć, że prędkość i przyspieszenie otrzymane w symulacji powinno dobrze przybliżać wyniki eksperymentu. Maksymalna prędkość uzyskana numerycznie wynosi $24,3092\ m/s$ dla $t = 0,38\ s$ w *Modelu A* i $20,9369\ m/s$ dla $t = 0,3859\ s$ w *Modelu B*. Oba rezultaty są bardzo zbliżone do wartości otrzymanej eksperymentalnie, podanej w sekcji 4.2 ($21,16\ m/s$ w chwili $t = 0,39\ s$).

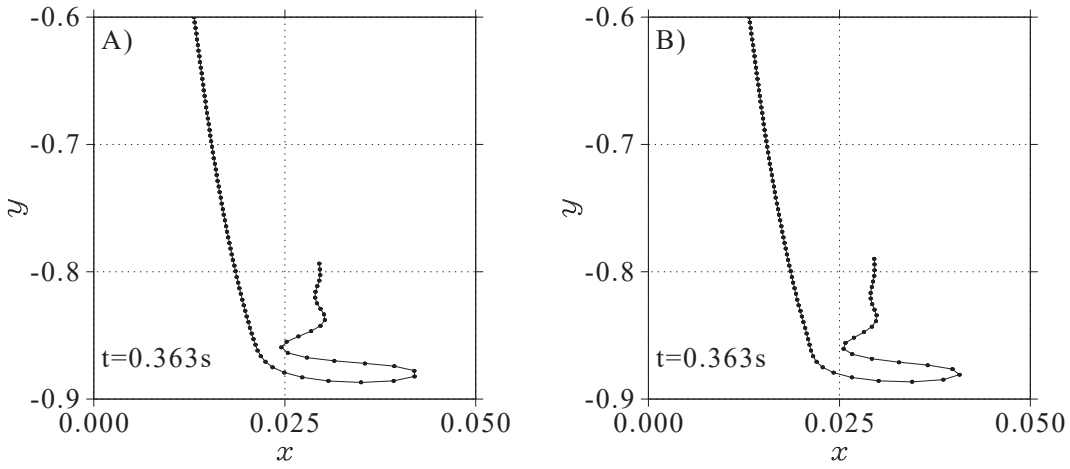
Dodatkowo obserwujemy, że rezultaty otrzymane dla modelu *Modelu A* i *Modelu B* są porównywalne. Potwierdza to również rysunek 4.22 pokazujący, w dużym powiększeniu, kształty łańcucha w końcowej fazie spadku. Widzimy, że dla $t = 0,363\ s$ kształt końca łańcucha w obu przypadkach jest niemal identyczny. Zwracamy uwagę, że drgania łańcucha obserwowane w poprzednich symulacjach zostały wytłumione i kształt łańcucha jest wynikiem zastosowania sprężystości i tłumienia w modelu.




**Rysunek 4.20:** Symulacja spadku realnego łańcucha dla $x_0 = 0,03\ m$ o długości $L = 1\ m$, masie $M = 0,022\ kg$ i składającego się z $n = 255$ ogniw. Kształt początkowy łańcucha stanowiła dyskretna krzywa łańcuchowa o końcach wiszących na jednym poziomie i odległych o $x_0 = 0,03\ m$. Górna część przedstawia wyniki dla *Modelu A* a dolna dla modelu *Modelu B*. Rysunki przedstawiają konfiguracje spadającego łańcucha dla tych samych czasów co na rysunku 4.13.




**Rysunek 4.21:** Prędkość A) i przyspieszenie B) spadającego końca łańcucha realnego o długości $L = 1\ m$, masie $M = 0,022\ kg$ i składającego się z $n = 255$ ogniw. Konfigurację początkową stanowiła dyskretna krzywa łańcuchowa z końcami oddalonymi o $x_0 = 0,03\ m$. Górna część przedstawia wyniki dla *Modelu A*, a dolna dla modelu *Modelu B*. Linia czarna przedstawia wyniki otrzymane w symulacji, linia czerwona reprezentuje rezultaty otrzymane z modelu analitycznego.



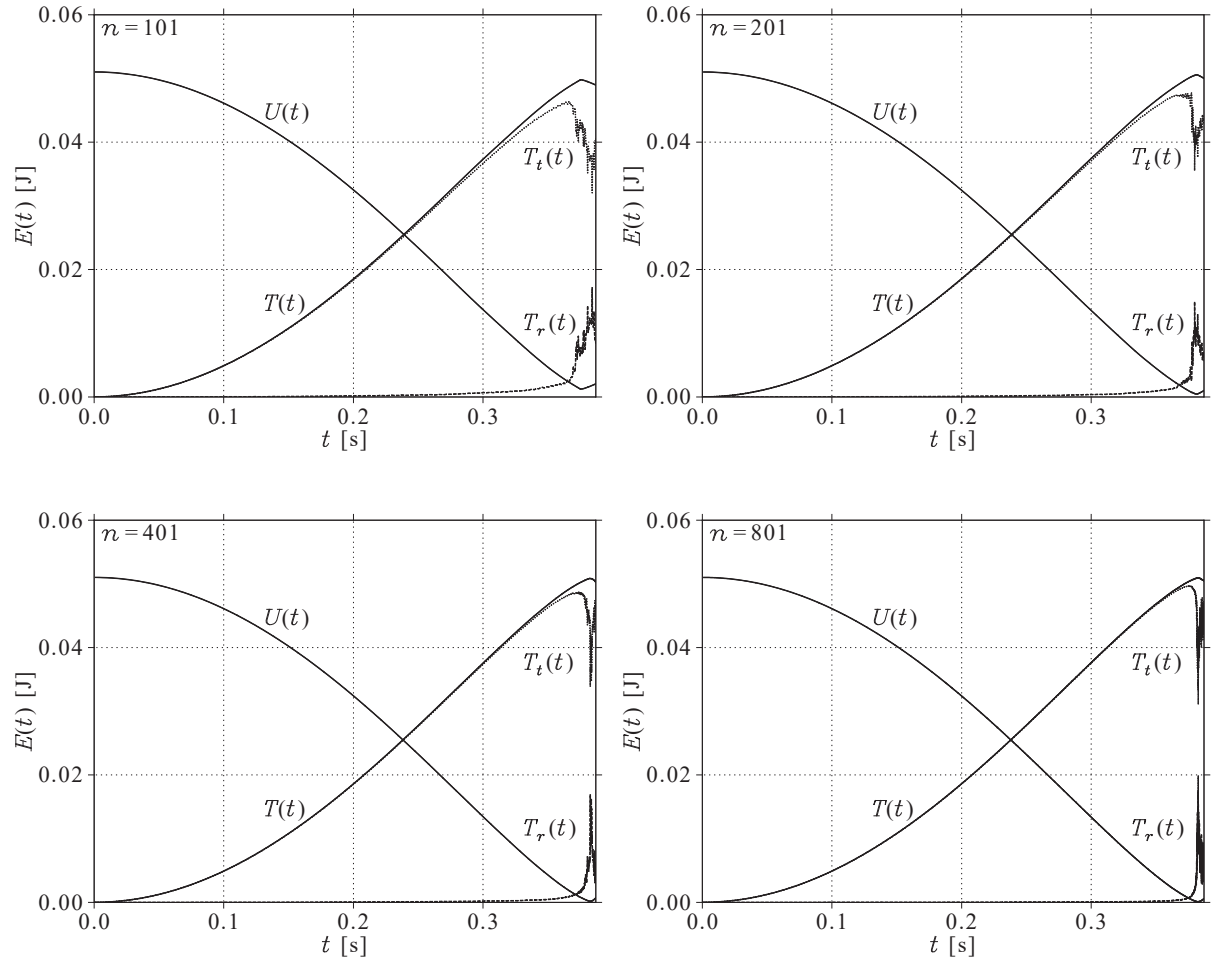

**Rysunek 4.22:** Końcowa faza spadku realnego łańcucha, którego początkowym kształtem była krzywa łańcuchowa o końcach odległych o $x_0 = 0,03\ m$. Rysunek A) przedstawia koniec łańcucha w chwili $t = 0,363\ s$ uzyskany dla *Modelu A*, a rysunek B) dla *Modelu B*. W celu prezentacji szczegółów, rysunki zostały poszerzone w osi $x$ w skali 6:1.

### 4.3.4. Analiza wyników symulacji spadku łańcucha złożonego

Wyniki symulacji prezentowane w tej części pokazują dużą zgodność rezultatów numerycznych z teoretycznymi. Analizując wykresy prędkości i przyspieszenia, widzimy, że dla *Modelu B* maksymalna prędkość jest mniejsza niż dla modelu *Modelu A* i wartości maksymalne występują później. Widzimy również, że dla *Modelu A* maksimum osiągane jest przed czasem $t_c(L)$ a dla modelu *Modelu B* po tym czasie. Symulacje numeryczne dla *Modelu A* i *Modelu B* pokazują, że istotne szczegóły ruchu mogą zależeć od budowy łańcucha. Przyjęcie, że segment łańcucha jest prętem, którego środek masy znajduje się na środku pręta, powoduje pojawienie się oprócz energii kinetycznej translacyjnej $T_t$, energii kinetycznej rotacyjnej $T_r$ związanej z obrotem pręta. W rezultacie, w części spadającej łańcucha pojawiają się drgania, których nie obserwujemy dla układu wahadeł, w którym występuje jedynie człon $T_t$.

Drgania wzbudzane podczas spadku związane są z dyskretyzacją modelu. Warto jest więc sprawdzić, jak zachowuje się model dyskretny, gdy będziemy zwiększać liczbę ogniw. W szczególności interesować nas będzie jak wygląda przebieg energii rotacyjnej w *Modelu A*

w zależności od $n$. W tym celu wykonaliśmy dodatkowe symulacje dla łańcucha początkowo składającego się z dwóch równoległych części połączonych jednym segmentem. Symulacje przeprowadziliśmy używając *Modelu A* dla $n = 101, 201, 401, 801$ segmentów i obliczyliśmy wartości energii podczas spadku łańcucha. Wyniki prezentujemy na rysunku 4.23. Porównując wykresy energii, widzimy, że zgodnie z oczekiwaniem energia całkowita jest stała w każdym z przypadków. Potwierdza to zatem poprawność obliczeń. Wykresy pokazują, że wraz ze wzrostem $n$ energia potencjalnej $U$ i całkowita kinetyczna $T$ nie zmieniają się znacząco. Wykresy te są dodatkowo zgodne z wynikami prezentowanymi dla rozwiązania analitycznego 4.2. Ciekawym zjawiskiem jest zanik energii rotacyjnej $T_r$ wraz ze wzrostem $n$. Widzimy, że dla rosnącego $n$ energia ta maleje i w końcowej fazie spadku pojawia się coraz ostrzejsze maksimum. Ostatecznie, gdy łańcuch będzie już całkowicie rozciągnięty, cała energia kinetyczna pojawi się jako energia obrotu ostatniego segmentu. Z tego wnioskujemy, że przy rosnącym $n$ będą zanikać drgania łańcucha i model dyskretny będzie dążył do modelu ciągłego. Warto tu również dodać, że niemalże identyczne wykresy $U$ i $T$ uzyskaliśmy wykonując obliczenia dla *Modelu B*. Widzimy więc, że dla obu modeli, dla dużych $n$ wyniki symulacji będą zbliżone.




**Rysunek 4.23:** Energia łańcucha złożonego podczas spadku. Kolejne wykresy przedstawiaj energię kinetyczną $T$ (w rozbiciu na energię kinetyczną translacyjną $T_t$ i rotacyjną $T_r$) oraz potencjalną $U$, otrzymane w symulacji spadku łańcucha. Symulację wykonano przy użyciu *Modelu A* dla łańcucha o długości $L = 1\ m$, masie $M = 0,022\ kg$ i składającego się z $n = 101, 201, 401, 801$ ogniw.

## 4.4. Podsumowanie

W tym rozdziale pokazaliśmy, że dla małych wychyleń początkowych łańcucha, dynamika łańcucha może być przybliżona przez model analityczny wyprowadzony z zasady zachowania energii. Wyjaśnienie, dlaczego koniec łańcucha spada z przyspieszeniem większym niż przyspieszenie ziemskie $g$, można uzyskać analizując siły działające w zgięciu łańcucha. Dzieje się tak dlatego, że dodatkowo w zgięciu łańcucha działa wewnętrzna siła odśrodkowa, proporcjonalna do kwadratu prędkości końca łańcucha.

Rezultaty symulacji: kształt łańcucha w kolejnych fazach spadku oraz prędkość, okazały się zgodne z danymi uzyskanymi w eksperymencie. Porównanie wyników otrzymanych przy użyciu różnych modeli matematycznych pokazało, że szczegóły dynamiki łańcucha zależą w dużej mierze od szczegółów budowy łańcucha. Widzimy również, że model analityczny ma swoje granice stosowalności. Zawodzi po osiągnięciu przez łańcuch pozycji minimalnej. Analogicznie do odbicia idealnie sprężystej piłki, można by się spodziewać, że po osiągnięciu pozycji minimalnej łańcuch idealny powinien wracać do pozycji początkowej, symetrycznej względem osi $y$. Patrząc na wyniki doświadczeń i symulacji widzimy, że po osiągnięciu minimum, dynamika łańcucha staje się bardzo złożona. W przypadku symulacji łańcucha idealnego, oprócz wspomnianych wcześniej drgań, w końcowej fazie spadku występuje dodatkowo rotacja segmentów. Wszystko to prowadzi do chaotycznego zachowania się łańcucha po osiągnięciu minimalnej pozycji.

# Rozdział 5
# Spadek swobodny łańcucha rozwartego

Eksperymenty numeryczne przeprowadzone dla łańcucha złożonego potwierdzają zbieżność rezultatów (prędkości i przyspieszeń końca łańcucha) z wynikami otrzymanymi dla modelu analitycznego. W tej części przeprowadzimy dodatkowe obliczenia dla łańcuchów, których końce wiszą początkowo w większej odległości od siebie. Przypadek, w którym początkowa odległość między końcami łańcucha była znacząco większa od zera, po raz pierwszy opisany został w [12]. W serii doświadczeń z różną wstępną odległością między końcami łańcucha autorzy sprawdzili, czy wyniki doświadczalne są zgodne z wynikami dla modelu analitycznego. W pracy [73] kontynuowaliśmy te badania i przedstawiliśmy zależności między początkową odległością między końcami łańcucha a prędkością i przyspieszeniem opadającego końca łańcucha. W powyższej publikacji opisaliśmy przeprowadzone eksperymenty laboratoryjne i odpowiadające im symulacje numeryczne. Bardzo ciekawym przypadkiem okazał się przypadek, w którym początkowa odległość między końcami łańcucha wynosi $L$ (gdy łańcuch jest początkowo maksymalnie rozciągnięty).

## 5.1. Doświadczenia laboratoryjne dla rozwartych łańcuchów

Zagadnienie spadku łańcucha rozwartego realizowane było we współpracy z Jean-Christophe Géminardem[1], który wykonał doświadczenia spadku łańcucha. Współpraca zakończyła się opublikowaniem wspólnej pracy dotyczącej dynamiki łańcuchów [73]. W dalszej części opiszemy przebieg doświadczeń oraz ich wyniki. Schemat aparatury doświadczalnej opisany został szczegółowo w pracy [73]. Łańcuch użyty w eksperymentach składał się z jednakowych segmentów, zbudowanych z pręta i kulki połączonych ze sobą. Jest to nieco inny łańcuch niż ten użyty w doświadczeniach z poprzedniego paragrafu 4.2. Całkowita długość segmentu wynosi $l = (4,46 \pm 0,01) \times 10^{-3}\ m$, średnica kulek równa jest $\phi = (3,26 \pm 0,01) \times 10^{-3}\ m$. Minimalny promień krzywizny, dla którego łańcuch może się zginać bez wystąpienia dodatkowej energii sprężystej między ogniwami wynosi $R_{min} = (4,8 \pm 0,2) \times 10^{-3}\ m$. Całkowita długość łańcucha równa jest $L = 1,022\ m$, co odpowiada $n = 229$ segmentom o łącznej masie $M = (2,08 \pm 0,01) \times 10^{-2}\ kg$.

Ten łańcuch przymocowany został w jednym końcu do stabilnej podpory oznaczonej przez $O$ za pomocą cienkiej nici. W punkcie $P = (x_0,\ y_0)$ umieszczony został drugi koniec łańcucha. Koniec ten zakończony jest prętem (po uprzednim usunięciu ostatniej kulki), do którego przymocowana została nylonowa żyłka o średnicy $10^{-4}\ m$. Jako drugi obiekt, który będzie spadał swobodnie wybrany został ołowiany ciężarek o masie $\mathcal{M} = 10^{-2}\ kg$. Ciężarek ten zamocowany został na końcu żyłki o długości około $0,05\ m$, zaczepionej do końca łańcucha. Tak przygotowany zestaw zawieszano na cienkim niklowym drucie o średnicy $10^{-4}\ m$ wspartym na dwóch gwoździach. Koniec łańcucha i ciężarek wypoziomowane zostały tak, aby były na tej samej wysokości co pierwszy koniec łańcucha $O$. Masa ciężarka $\mathcal{M}$ równa jest połowie masy łańcucha $M$, co sprawia, że układ można w łatwy sposób ustawić w równowadze. Po wygaszeniu drgań, kształt łańcucha będzie przybliżoną krzywą łańcuchową. Cienki drut niklowy podłączony został do źródła prądu. Po włączeniu prądu elektrycznego (około 1 $A$) żyłka, która podtrzymuje układ łańcuch–ciężarek, przepala się i oba obiekty w

[1] http://perso.ens-lyon.fr/jean-christophe.geminard/index.htm

tej samej chwili zaczynają spadać swobodnie pod wpływem siły ciężkości. W czasie spadku, do obu obiektów doczepiony jest zatem kawałek żyłki, nie ma to jednak widocznego wpływu na dynamikę, gdyż żyłka jest bardzo cienka i jej masa jest nieznaczna w porównaniu do masy ciężarka i łańcucha. Spadający łańcuch i ciężarek zostały sfotografowane za pomocą kamery wideo CCD (*Panasonic WV-BP550/G*). Wybrany czas otwarcia migawki (1/4000 $s$) jest wystarczający dla uzyskania wyraźnych obrazów zarówno łańcucha jak i obciążnika. Filmy zostały zdigitalizowane uzyskując finalnie rozdzielczości 50 klatek na sekundę. Wyniki doświadczeń w postaci zdjęć przedstawione zostały w pracy [73].

W rezultacie, na podstawie analizy zdjęć cyfrowych otrzymaliśmy współrzędne końca łańcucha i ciężarka w chwilach $t_i$. Eksperymentalnie wyznaczona pozycja obiektu (końca łańcucha) opisana została jako pionowe $h$ i poziome $w$ odchylenia aktualnej współrzędnej końca łańcucha $x(t)$ i $y(t)$, w chwili $t$, od jej położenia początkowego $(x_0,\ y_0)$:

$$\begin{aligned} w(t) &= x_0 - x(t), \\ h(t) &= y_0 - y(t). \end{aligned} \tag{5.1}$$

## 5.2. Symulacje numeryczne dla rozwartego łańcucha

W tym paragrafie opiszemy przebieg obliczeń numerycznych zmierzających do odtworzenia wyników eksperymentów opisanych w rozdziale 5.1. Symulacje numeryczne przeprowadzone zostały dla *Modelu A* z parametrami odpowiadającymi parametrom łańcucha użytego w doświadczeniach: $n = 229$, $L = 1,022\ m$, $M = 0,0208\ kg$, $g = 9,81\ m/s^2$, dla czasu $t$ od 0 do $0,5\ s$.

### 5.2.1. Wybór parametrów symulacji

Wstępnie przeprowadzone doświadczenia pokazały, że przy spadku łańcucha wiszącego początkowo z $x_0 \gg 0,05L$, sprężystość między segmentami jest pomijalna. Ważnym czynnikiem mającym wpływ na dynamikę okazało się tłumienie występujące pomiędzy segmentami. Parametr $r$, związany z tym czynnikiem, dobraliśmy tak, aby wyniki obliczeń numerycznych

możliwie dobrze przybliżały wyniki eksperymentów laboratoryjnych. W tym celu porównaliśmy położenie końca łańcucha otrzymane w obliczeniach numerycznych z danymi eksperymentalnymi. Różnicę między tymi rezultatami obliczyliśmy korzystając ze wzoru:

$$\delta(r) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(w_i - \hat{w}_i)^2 + (h_i - \hat{h}_i)^2}, \tag{5.2}$$

gdzie $N$ oznacza liczbę punktów pomiarowych. Punkty $(w_i,\ h_i)$ i $(\hat{w}_i,\ \hat{h}_i)$, dla $i = 1...N$, oznaczają poziome i pionowe odchylenia końca łańcucha od pozycji początkowej, odpowiednio w przypadku eksperymentu laboratoryjnego i numerycznego. Wartości tych punktów obliczyliśmy ze wzoru (5.1). Znalezienie najlepszego przybliżenia numerycznego dla wyników laboratoryjnych odpowiadać będzie wyznaczeniu takiej wartości $r$, która minimalizuje następujące wyrażenie:

$$\Delta(r) = \delta^a(r) + \delta^b(r) + \delta^c(r) + \delta^d(r), \tag{5.3}$$

gdzie funkcje $\delta^a$ – $\delta^d$ oznaczają wartości funkcji $\delta$ dla poszczególnych eksperymentów $a$) – $d$). Wartość optymalną parametru $r$ poszukiwaliśmy w przedziale od $r_1 = 0$ do $r_2 = 10^{-4}\ Nms$. Dla $r > r_2$ wartość funkcji $\Delta(r)$ rośnie. Przeprowadziliśmy obliczenia dla różnych wartości $r \in [r_1,\ r_2]$ i poszukiwaliśmy takiej wartości $r_0$, dla której $\Delta(r_0)$ jest najmniejsza. W ten sposób wyznaczyliśmy wartość optymalną współczynnika $r_0 = 2,163 \times 10^{-5}\ Nms$, dla którego $\Delta(r_0) = 0,02479\ m$. Na krańcach przedziału funkcja ta równa jest odpowiednio $\Delta(r_1) = 0,029845\ m$ i $\Delta(r_2) = 0,03357\ m$. Wartości odchyleń $\delta(r)$ w każdym z omawianych eksperymentów przedstawia tabela 5.1.

### 5.2.2. Wyniki symulacji

Po wyznaczeniu optymalnej wartości współczynnika tłumienia możemy przeprowadzić symulacje i porównać wyniki obliczeń z wynikami otrzymanymi w doświadczeniach. Wykresy 5.1 przedstawiają dopasowanie trajektorii końca łańcucha wyznaczonej numerycznie do wartości wyznaczonych doświadczalnie. To dopasowanie reprezentowane jest przez funkcje $w(t)$ i

**Tabela 5.1:** Różnica między wynikami eksperymentów i symulacji komputerowych.

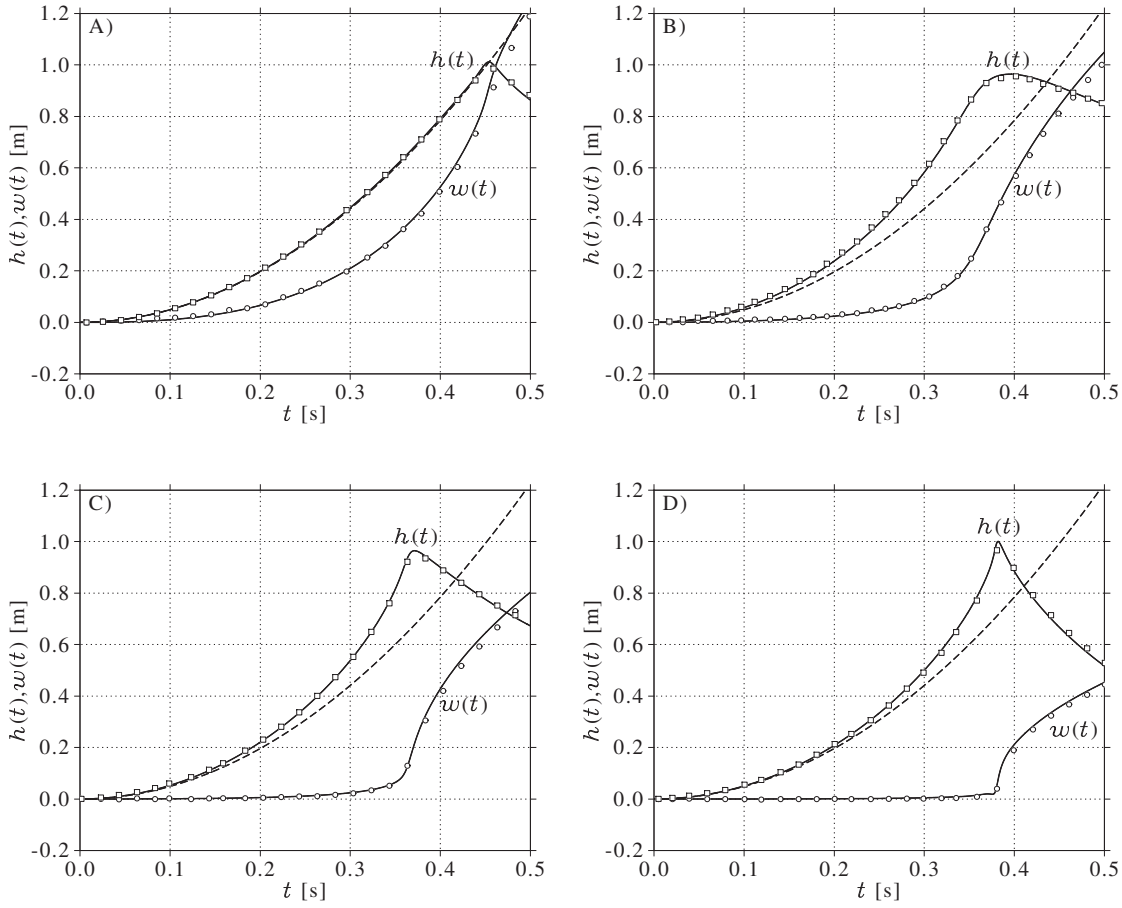
| Eksperyment: | $\delta_{r_1}\ [m]$ | $\delta_{r_0}\ [m]$ | $\delta_{r_2}\ [m]$ |
|---|---|---|---|
| $a)$ | $0,008406$ | $0,007672$ | $0,01038$ |
| $b)$ | $0,006851$ | $0,006654$ | $0,00659$ |
| $c)$ | $0,006191$ | $0,005912$ | $0,00669$ |
| $d)$ | $0,008397$ | $0,004552$ | $0,00991$ |

$h(t)$ określające poziome i pionowe wychylenie końca łańcucha od pozycji początkowej. Wartości wychyleń, wyznaczone doświadczalnie, zaznaczone zostały jako punkty na wykresach. Dodatkowo na wykresach przedstawiono również trajektorię spadającego swobodnie ciała, reprezentowaną przez przerywaną linię. W każdym z przypadków wartości $\delta$ są względnie małe (mniejsze niż $0,004\ m$) do momentu, gdy koniec łańcucha osiągnie pozycję minimalną. Po tej chwili stają się dużo większe, przekraczając nawet wartość $10^{-2}\ m$, co ma znaczący wpływ na wartość funkcji $\Delta(r)$. Ostatecznie, na rysunku 5.2 prezentujemy wyniki symulacji, które odpowiadają doświadczeniom opisanym w poprzedniej części. Poszczególne konformacje łańcucha na tych rysunkach odpowiadają wynikom doświadczalnym dla tych samych chwil $t$. Dodatkowo pokazaliśmy jak wygląda teoretycznie spadek ciała swobodnego w porównaniu z końcem łańcucha. Wykresy 5.2 potwierdzają, że wyniki doświadczalne i numeryczne są niemal identyczne.

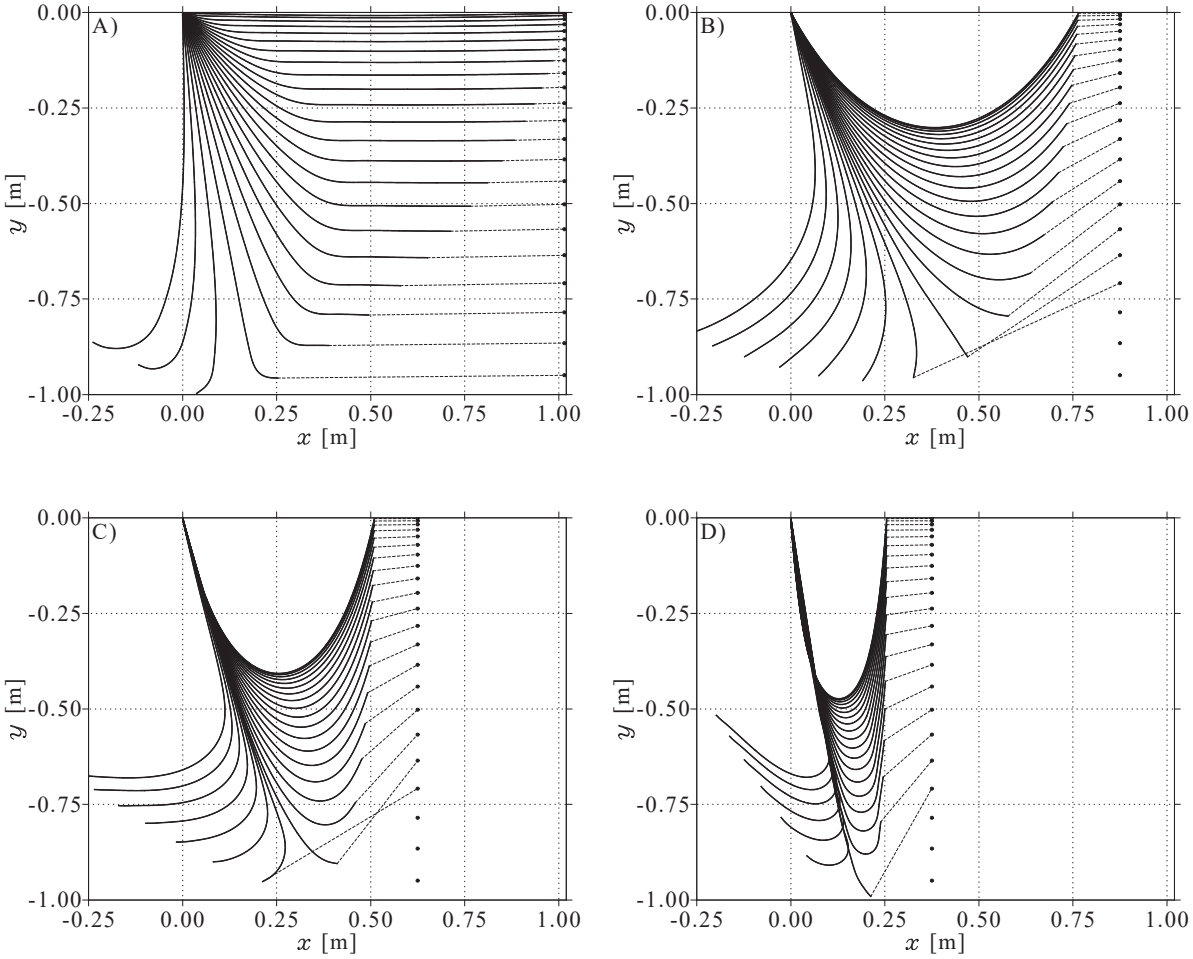
## 5.3. Analiza wyników symulacji spadku łańcucha

Rezultaty symulacji przeprowadzonych w poprzedniej części są zgodne z danymi laboratoryjnymi. Dlatego w dalszej części analizę spadku łańcuchów przeprowadzimy w oparciu o dane numeryczne.

Analizę wyników zaczniemy od zbadania relacji między czasem spadku końca łańcucha a



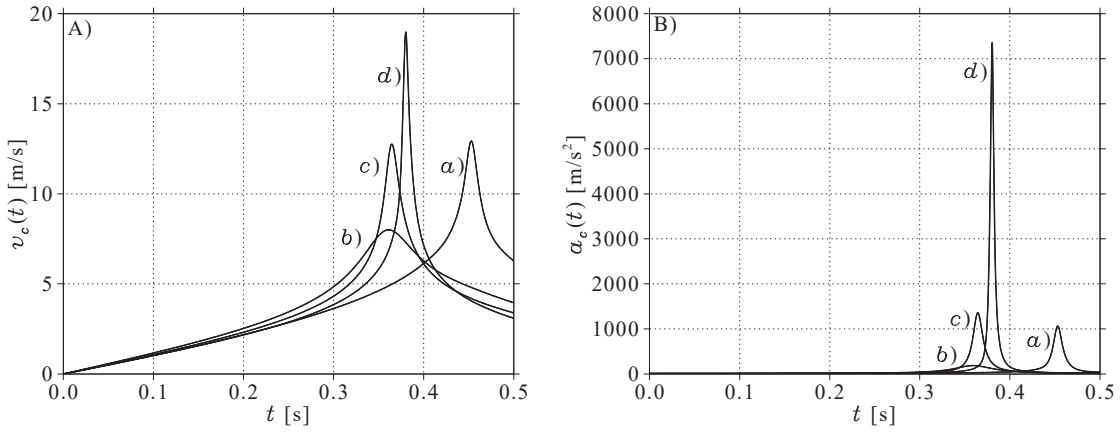

**Rysunek 5.1:** Odchylenie końca łańcucha od pozycji początkowej. Rysunki przedstawiają pionowe $h(t)$ i poziome $w(t)$ odchylenie końca łańcucha od pozycji początkowej w czasie spadku. Dane numeryczne przedstawia linia ciągła a dane eksperymentalne punkty (kółka, kwadraty). Rysunek A) przedstawia rezultaty dla eksperymentu z $x_0 = 1,0195\ m$, B) dla $x_0 = 0,765\ m$, C) dla $x_0 = 0,51\ m$ oraz D) dla $x_0 = 0,255\ m$.




**Rysunek 5.2:** Wyniki symulacji komputerowej dla spadku łańcucha. Rysunki przedstawiają kolejne fazy spadku łańcucha wyznaczone w symulacji i odpowiadają wynikom eksperymentalnym z pracy [73]. Symulacje przeprowadzone zostały dla łańcucha o długości $L = 1,02$ m, masie $M = 0,0208\ kg$, składającego się z $n = 229$ ogniw połączonych przegubem tłumiącym z parametrem $r = 2,163 \times 10^{-5}\ Nms$, spadającego z przyspieszeniem $g = 9,81\ m/s^2$. Początkowo łańcuch wisiał swobodnie a odległość między jego końcami wynosiła A) $x_0 = 1,0195\ m$, B) $x_0 = 0,765\ m$, C) $x_0 = 0,51\ m$ i D) $x_0 = 0,255\ m$. Położenie ciała spadającego swobodnie zostało narysowane po prawej stronie rysunku.

swobodnie spadającego ciała. Dla omawianych wcześniej doświadczeń relację tę zaobserwować można na wykresach 5.1. W przypadkach *b*), *c*) i *d*) zauważyć można, że aż do momentu osiągnięcia przez koniec łańcucha położenia minimalnego (wartość odchylenia $h(t)$ jest wtedy największa), łańcuch spada zawsze szybciej. Najbardziej zaskakującym przypadkiem wydaje się być przypadek *a*), w którym łańcuch początkowo wisiał rozciągnięty w pozycji poziomej. Odchylenie końca łańcucha od pozycji początkowej jest w tym przypadku niemalże identyczne jak dla ciała spadającego swobodnie. Zarówno w doświadczeniu jak i symulacji komputerowej obserwujemy, że podczas spadku, część łańcucha pozostaje w pozycji poziomej i nie może zachodzić tu zjawisko kumulacji energii, podobnie jak dla złożonego łańcucha. Po naszej publikacji pojawiła się publikacja [74] powołująca się na rezultaty przedstawione w naszej pracy, w której autorzy również wyjaśniają przyczynę tego zjawiska. W dalszej części przeprowadzimy analizę prędkości $v_c$ i przyspieszenia $a_c$ końca łańcucha, w zależności od czasu. Na rysunku 5.4 prezentujemy prędkości i przyspieszenia dla eksperymentów *a*) – *d*). Przez prędkość i przyspieszenie rozumiemy moduł ich wartości.

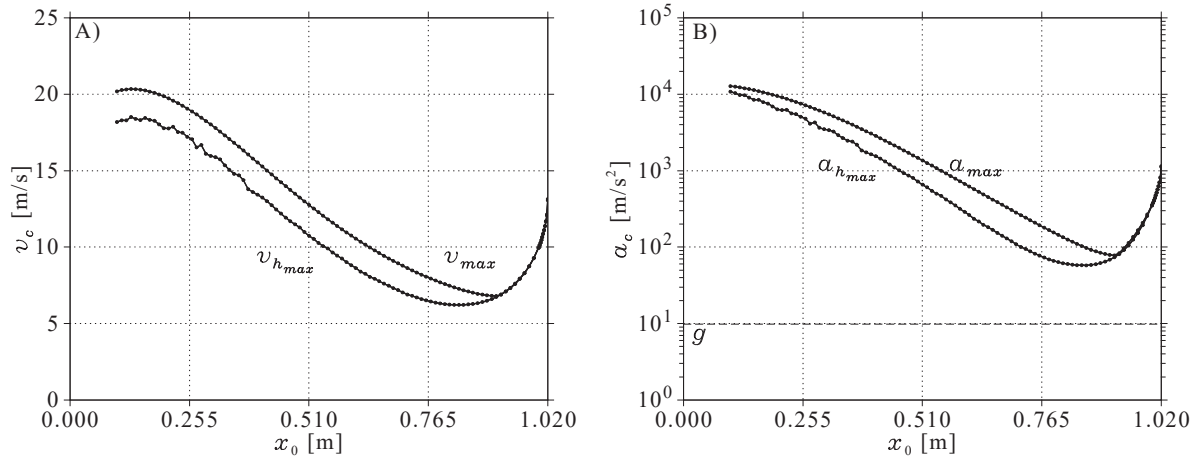
Na wykresach prędkości i przyspieszeń dla doświadczeń *b*) – *d*) widzimy, że dla coraz krótszego rozwarcia $x_0$, maksymalna prędkość i maksymalne przyspieszenie są większe i występują później. Dodatkowo, z wykresów wynika, że przypadek *a*) jest wyjątkowy, gdyż maksymalna prędkość i maksymalne przyspieszenie są porównywalne do tych otrzymanych w przypadku *c*) i występują znacznie później niż w pozostałych doświadczeniach. Oznacza to, że dla pewnego $x_0 > 0,75L$ dynamika łańcucha radykalnie się zmienia. W celu zbadania tego zjawiska przeprowadziliśmy dodatkowe obliczenia dla $x_0$ od $0,1\ m$ do $1,02\ m$, z krokiem $0,01\ m$. Wszystkie pozostałe parametry równań ruchu pozostają takie same jak w poprzednim paragrafie. Możemy postawić pytanie: dla jakich wartości $x_0$ maksymalna wartość prędkości i przyspieszenia jest największa? Wyniki obliczeń przedstawiliśmy na wykresach 5.4 i 5.5. Moment, w którym koniec łańcucha osiągnie maksymalne odchylenie $h_{max}$ oznaczać będziemy $t_{h_{max}}$, a moment, dla którego prędkość końca jest największa przez $t_{v_{max}}$. Na rysunku 5.4 A) widzimy, że zależność $v_{max}$ od $x_0$ nie jest oczywista. Wykres przedstawia maksymalną wartość prędkości $v_{max}$ oraz $v_{h_{max}}$ w zależności od początkowej odległości między końcami




**Rysunek 5.3:** Prędkość i przyspieszenie końca łańcucha w eksperymentach $a$) – $d$). Rysunek A) prezentuje wartość modułu prędkości, rysunek B) wartość modułu przyspieszenia podczas spadku końca łańcucha o długości $L = 1,02$ m, masie $M = 0,0208\ kg$, składającego się z $n = 229$ ogniw połączonych przegubem tłumiącym z parametrem $r = 2,163 \times 10^{-5}\ Nms$. Obliczenia przeprowadzono dla łańcuchów swobodnie wiszących z końcami odległymi o $a$) $x_0 = 1,0195\ m$, $b$) $x_0 = 0,765\ m$, $c$) $x_0 = 0,51\ m$ i $d$) $x_0 = 0,255\ m$.

łańcucha $x_0$. Niemalże w całym zakresie $x_0$ prędkość maksymalna jest większa niż prędkość w minimalnym położeniu. Początkowo, dla mniejszych $x_0$, obie wartości nieznacznie rosną osiągając maksimum dla $x_0 = 0,1314\ m$. Następnie obie wartości maleją, przy czym $v_{h_{max}}$ osiąga minimum dla wartości $x_0 = 0,8354\ m$ i zaczyna rosnąć. Dla $x_0 = 0,9040\ m$ wartość maksymalnej prędkości jest najmniejsza a dla $x_0 > 0,9040\ m$ prędkość maksymalna jest równa prędkości w najniższym położeniu łańcucha.

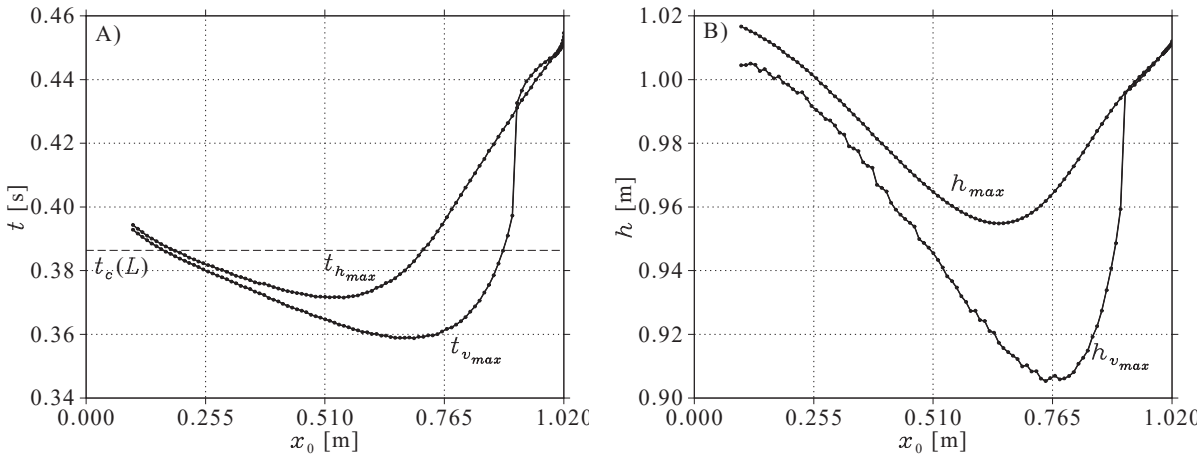
Na wykresie 5.4 B) obserwujemy podobne zachowanie dla przyspieszenia. Podobnie jak w przypadku prędkości, wykres ten pokazuje wyraźnie, że maksymalne przyspieszenie osiągane jest dla małych $x_0$. Obserwujemy również, że przyspieszenie maksymalne na ogół nie jest osiągane w minimalnym położeniu łańcucha $h_{max}$. Widzimy jednak, że jego wartość może być bardzo duża, dla $x_0 = 0,255\ m$ wynosi ona 7352 $m/s^2$ i jest około 40 razy większa niż dla $x_0 = 0,765\ m$ (186,3 $m/s^2$). W pracy [16] dotyczącej dynamiki strzału z bicza autorzy eksperymentalnie pokazali, że tak duże wartości przyspieszenia są możliwe. W rozdziale 7




**Rysunek 5.4:** Maksymalna prędkość A) i przyspieszenie B) końca łańcucha wyznaczone w zależności od $x_0$, w przedziale od $0,01\ m$ do $L$, z krokiem $0,01\ m$. Obliczenia wykonano dla łańcucha o długości $L = 1,02$ m, masie $M = 0,0208\ kg$, składającego się z $n = 229$ ogniw połączonych przegubem tłumiącym z parametrem $r = 2,163 \times 10^{-5}\ Nms$. Wartości $v_{max}$ i $a_{max}$ są maksymalnymi wartościami prędkości i przyspieszenia końca łańcucha podczas jego spadku aż do osiągnięcia pozycji minimalnej. Wartości $v_{h_{max}}$ and $a_{h_{max}}$ są to prędkości i przyspieszenie końca łańcucha w chwili, gdy osiągnął on najniższą pozycję. Rysunek B) narysowany został w skali logarytmicznej.

wykażemy związek dynamiki spadku lin z dynamiką strzelającego bicza. W wyjaśnieniu omawianych tutaj zależności pomocne będą wykresy pokazujące porównanie czasu i wysokości powiązanych z $v_{max}$ i $v_{h_{max}}$. Zależności te wykreślone zostały na rysunku 5.5.

Dzięki tym wykresom możemy sprawdzić jak czas $t_{h_{max}}$, w którym koniec łańcucha osiągnie swoje najniższe położenie, zależy od początkowego rozwarcia łańcucha $x_0$. Zależność ta przedstawiona została na rysunku 5.5 A). Na tym wykresie widzimy, że koniec łańcucha osiąga najniższą pozycję w najkrótszym czasie dla $x_0 = 0,55\ m$, czyli gdy początkowa odległość między końcami łańcucha wynosi około połowy jego całkowitej długości. Po tym, czas spadku $t_{h_{max}}$ znów rośnie osiągając maksimum dla łańcucha początkowo całkowicie wyprostowanego $x_0 = L$. Widzimy również, że poza niewielkimi obszarami w okolicy wartości granicznych $x_0$,




**Rysunek 5.5:** Czas i wychylenie końca łańcucha przy osiągnięciu maksymalnej prędkości dla $x_0$ od $0,01\ m$ do $L$, zmieniającego się z krokiem $0,01\ m$. Rysunek A) przedstawia wykres czasu $t_{h_{max}}$, w którym koniec łańcucha osiągnął najniższą pozycję oraz wykres czasu $t_{v_{max}}$, dla którego koniec osiągnął maksymalną prędkość. Linia przerywana reprezentuje czas osiągnięcia maksymalnej prędkości i minimalnego położenia dla modelu łańcucha zgiętego ($t_c(L) \approx 0,3867\ s$). Na rysunku B) przedstawiliśmy wykres maksymalnego wychylenia końca łańcucha $h_{max}$ oraz wychylenia $h_{v_{max}}$, dla którego łańcuch osiągnął maksymalną prędkość.

koniec łańcucha osiąga maksymalną prędkość w czasie innym niż osiąga minimalne położenie. Widać zatem, że ta dynamika nie może być opisana przez model analityczny opisany w rozdziale 4.1.

Na wykresie 5.5 A) zauważyć można, że maksymalna prędkość zostanie osiągnięta najszybciej dla $x_0 = 0,7\ m$. Rysunek 5.5 B) pokazuje, że łańcuch spada najniżej dla małych odległości $x_0$ i wartość maleje osiągając minimum dla $x_0 = 0,76\ m$. Z tych wykresów wynika, że łańcuch osiąga prędkość maksymalną przed osiągnięciem minimalnego położenia. Zauważamy również, że w całym badanym zakresie $x_0$, łańcuch nie osiąga minimalnego położenia $h = L$. Z drugiej strony, widzimy, że wykres $h$ zbliża się do wartości maksymalnej, gdy $x_0$ zbliża się do $0,01\ L$. Może to sugerować, że dla $x_0 \to 0$ łańcuch osiągnie położenie minimalne. Wyniki z paragrafu 4.3 pokazują jednak, że nawet dla dużo mniejszych $x_0$, łańcuch

nie osiąga minimalnej pozycji, ze względu na oscylacje w części nieruchomej. Stwierdzamy również, że dla spadku łańcucha z dużym początkowym oddaleniem końców $x_0 > 0,7\ m$, spadek łańcucha znacząco różni się od spadku z małymi $x_0 < 0,5L$. Wydaje się, że dla przypadku $x_0 = L$ powinno istnieć rozwiązanie analityczne, jednakże proste rozwiązanie nie zostało znalezione.

Równanie opisujące spadek wyprostowanego łańcucha zostało podane w jednej z ostatnich prac dotyczących spadku łańcuchów [75]. Jest to równanie falowe opisującego kształt fali biegnącej w strunie umieszczonej w polu grawitacyjnym. Rozwiązanie tego równania nie ma niestety prostej analitycznej formy i wymaga zastosowania metod numerycznych. Rezultaty obliczeń przeprowadzonych w tej publikacji porównane zostały z wynikami przedstawionymi w pracy [73]. Zgodność obliczeń jest bardzo duża, co dodatkowo potwierdza słuszność podejścia zastosowanego przez autorów.

## 5.4. Podsumowanie

Wyniki analizy przyprowadzonej w tym rozdziale pokazują nowe fakty dotyczące dynamiki spadającego łańcucha. Widzimy, że wraz ze wzrostem odległości między końcami wiszącego łańcucha, dynamika spadku łańcucha jest inna niż ta opisywana przez model analityczny. Widzimy, że największe prędkości koniec łańcucha osiąga dla łańcucha złożonego, wartości maksymalne maleją wraz we wzrostem początkowej odległości między końcami. Zaskakujące jest to, że od $x_0 > 0,8863L$ maksymalna prędkość znów zaczyna rosnąć. Widzimy również, że czas spadku znacząco wydłużył się dla łańcuchów z $x_0 > 0,8863L$. Podobne rezultaty obserwujemy przy analizie przyspieszenia końca łańcucha. Rezultaty te mogą mieć znaczenie przy badaniu zachowania się liny w zastosowaniach technicznych. Przykład zastosowania wyników uzyskanych w tej pracy znaleźć możne w raporcie [76]. Ciekawym problemem, który również może mieć zastosowania techniczne są siły, które pojawiają się w punkcie zaczepienia liny podczas spadku. Zagadnienie to omawiać będziemy w kolejnym rozdziale.

# Rozdział 6
# Siły działające podczas spadku łańcucha

W tej części kontynuować będziemy analizę dynamiki spadającego łańcucha z różnymi początkowymi odchyleniami $x_0$ rozpoczętą w poprzednim rozdziale. Badać będziemy naprężenia jakie występują podczas spadku łańcucha w miejscu jego zaczepienia. Wprowadzenie do tego zagadnienia znaleźć można w pracy Wong i Yasui [74]. Szczegółową analizę i wyniki badań laboratoryjnych opisują prace [12] i [15]. W pierwszej pracy, autorzy badali maksymalne naprężenia w punkcie zaczepienia łańcucha podczas jego spadku, gdy początkowo końce łańcucha oddalone były od siebie o maksymalnie $x_0 = 0,3L$. Wyniki porównane zostały do wyników uzyskanych dla modelu analitycznego. Autorzy pracy [15] również poszukiwali maksymalnego naprężenia występującego w punkcie zawieszenia łańcucha. Praca ta zawiera wyniki eksperymentów podobnych do opisanych w pracy Géminarda i Vanela [73]. W tej publikacji zwrócono również uwagę na nieciągłości w pomiarach siły działającej na punkt wsparcia łańcucha z $x_0 \approx L$, w chwili początkowej spadku. Rezultaty otrzymane w wyniku tych doświadczeń nie są jednak zbyt dokładne ze względu na niską rozdzielczość czujnika wykorzystanego podczas eksperymentów. W rezultacie, na wykresach zawartych w tej pracy widoczne są silne oscylacje, które zakłócają wyniki.

Wykorzystanie obliczeń numerycznych umożliwiło przeprowadzenie szczegółowej analizy sił w podporze, dla łańcuchów z szerszym zakresem $x_0$ niż w doświadczeniach laboratoryjnych wykonanych przez Géminarda i Vanela. W naszych badaniach wykorzystamy wyniki eksperymentów przeprowadzonych przez tych autorów do zweryfikowania wyników symulacji.

Zastosowanie symulacji numerycznej umożliwi nam precyzyjne zbadanie zachowania łańcuchów wiszących z dużym rozwarciem $x_0$ i wyjaśnienie rezultatów otrzymanych w eksperymentach Géminarda i Vanela. Naprężenie w punkcie zaczepienia łańcucha wyznaczyć można na podstawie analizy przyspieszenia środka masy. Na początku, podobnie jak w przypadku badania spadku końca łańcucha, badania rozpoczniemy od obliczeń analitycznych.

## 6.1. Rozwiązanie analityczne spadku środka masy łańcucha

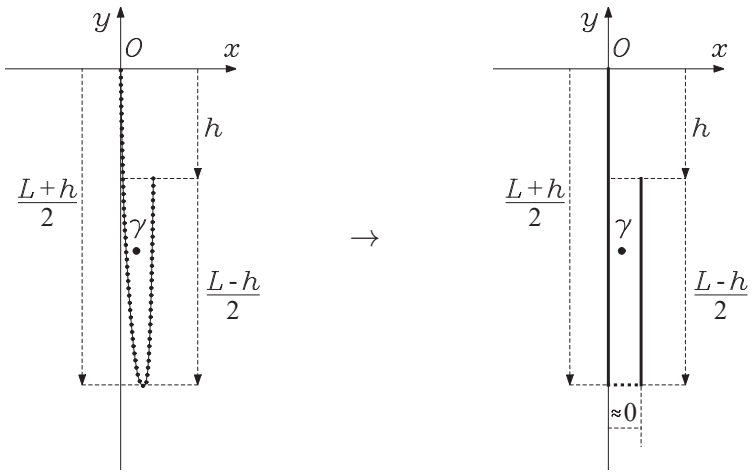
Analizę przyspieszeń i sił podczas spadku łańcucha zaczniemy od znalezienia rozwiązania analitycznego opisującego to zjawisko. Konstrukcja modelu analitycznego została opisana w pracach [70, 12, 71] a także w poprzedniej części tej pracy 4.1. Przypomnimy w skrócie główną ideę tego modelu. Zakładamy, że mamy łańcuch o długości $L$ i masie $M$ równomiernie rozłożonej wzdłuż jego długości. Podczas spadku w polu grawitacyjnym ze stałą $g$, łańcuch ten składa się z części ruchomej oraz tej, która już się zatrzymała. Części te połączone są w pewnym punkcie. Ruch łańcucha opisać można za pomocą zmiennej $h$, określającej odchylenie końca łańcucha od pozycji początkowej. Schemat tego modelu pokazuje rysunek 6.1. Rysunek ten przedstawia rzeczywisty łańcuch podczas spadku i odpowiadający mu model analityczny łańcucha. W modelu tym skupimy się na ruchu środka masy, oznaczonym jako $\gamma$, który związany jest z siłą działającą na punkt zaczepienia łańcucha.

Korzystając z obliczeń podanych w paragrafie 4.1, w prosty sposób możemy wyznaczyć położenie, prędkość i przyspieszenie środka masy $\gamma$ jako funkcje zmiennej $h$:

$$y^{\gamma}(h) = \frac{(L-h)^2}{4L} - \frac{L}{2}, \tag{6.1}$$

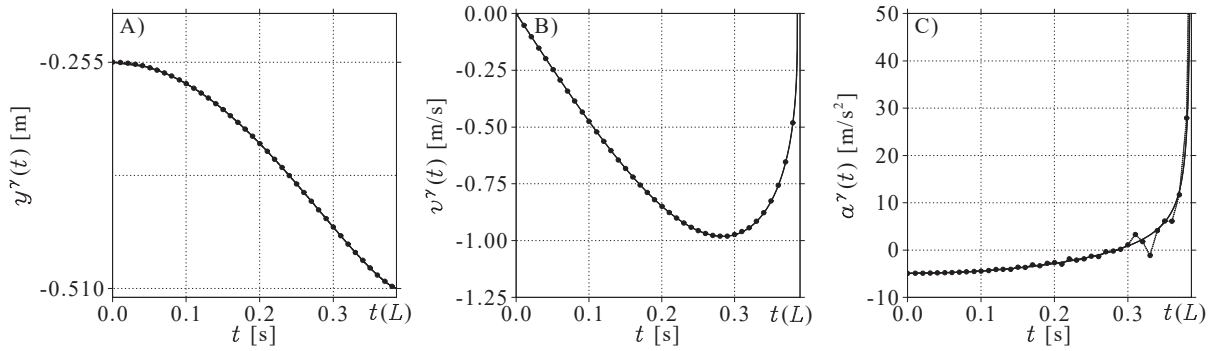
$$v^{\gamma}(h) = \frac{\mathrm{d}y^{\gamma}(h)}{\mathrm{d}h} v_c(h) = -\frac{L-h}{2L}\sqrt{\frac{gh\,(2L-h)}{L-h}}, \tag{6.2}$$

$$a^{\gamma}(h) = \frac{\mathrm{d}v^{\gamma}(h)}{\mathrm{d}h} v_c(h) = -\frac{g\,(2L^2-6Lh+3h^2)}{4L\,(L-h)}. \tag{6.3}$$




**Rysunek 6.1:** Model analityczny łańcucha podczas spadku. Podczas spadku zgiętego łańcucha, jego prawa opadająca część staje się coraz krótsza podczas gdy lewa, która się zatrzymała, wydłuża się. W każdej chwili wyznaczyć możemy położenie środka ciężkości łańcucha $\gamma$. Dystans, który przebył koniec łańcucha oznaczać będziemy przez $h$. W rzeczywistości kształt spadającego łańcucha jest krzywą przypominającą krzywą łańcuchową (rysunek lewy). W modelu analitycznym, spadający łańcuch jest przybliżony przez dwie równoległe do siebie części, połączone w punkcie (rysunek prawy).

Wartości te możemy wyrazić jako funkcję czasu $t$ korzystając z wcześniej wyprowadzonego wzoru (4.8). Wyniki, które otrzymaliśmy powyżej, porównamy z wynikami obliczeń numerycznych przeprowadzonych dla takiego samego łańcucha jak w rozdziale 5.2, czyli łańcucha o długości $L = 1,02\ m$ i masie $M = 0,0208\ kg$, złożonego z $n = 229$ ogniw i spadającego z przyspieszeniem $g = 9,81\ m/s^2$. Początkowo łańcuch wisiał z końcami oddalonymi o $x_0 = 0,05\ m$. Jako początkowy kształt łańcucha przyjęliśmy dyskretną krzywą łańcuchową. Dodatkowo w obliczeniach założyliśmy, że łańcuch jest idealny (nie występuje sprężystość i tłumienie między segmentami). Dla tak przyjętych parametrów łańcucha, czas w którym łańcuch osiągnął minimalną pozycję obliczony ze wzoru (4.8) wynosi $t(L) = 0,3863\ s$. Przy analizie wyników możemy rozważać tylko składową pionową ruchu środka masy. Wychylenia w poziomie są na tyle małe, że można je pominąć. Ruch środka masy reprezentowany będzie przez funkcje $y^\gamma$, $v^\gamma$ i $a^\gamma$. Przebieg tych funkcji przedstawia wykres 6.2.




**Rysunek 6.2:** Ruch środka masy spadającego łańcucha. Rysunki przedstawiają porównanie rezultatów otrzymanych w sposób analityczny (linia ciągła) i numerycznie (punkty): A) pozycja $y^\gamma(t)$, B) prędkość $v^\gamma(t)$ i C) przyspieszenie $a^\gamma(t)$ środka masy spadającego zgiętego łańcucha. Rezultaty otrzymano dla łańcucha o długości $L = 1,02\ m$, masie $M = 0,0208\ kg$ i przyspieszenia grawitacyjnego $g = 9,81\ m/s^2$. Obliczenia numeryczne wykonano dla łańcucha składającego się z $n = 229$ segmentów, początkowo wiszącego swobodnie z końcami odległymi o $x_0 = 0,05\ m$.

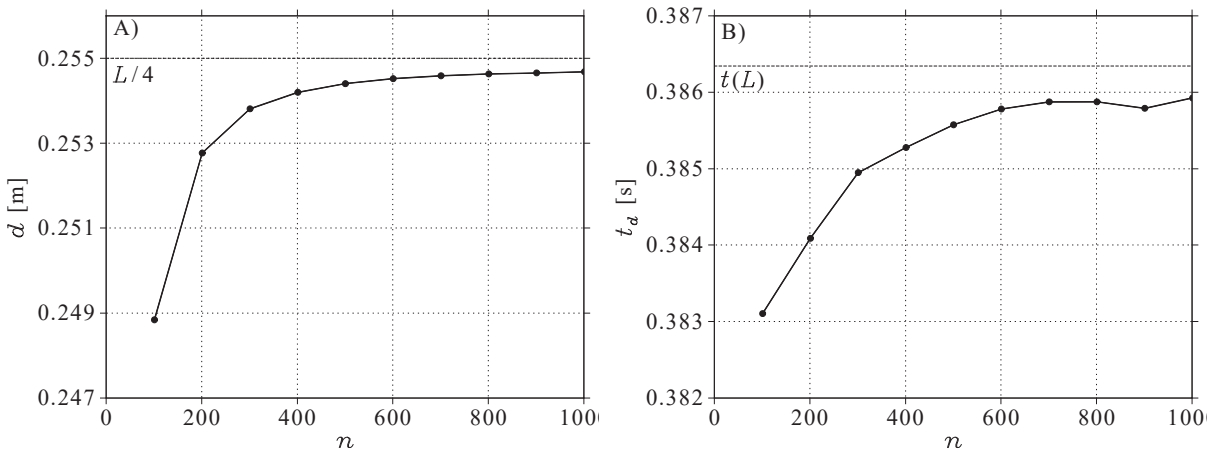
Jak pokazaliśmy w części 4.3, dla takiej konfiguracji rezultaty symulacji są zgodne z rozwiązaniem analitycznym. Rysunek 6.2 przedstawia porównanie wyników przebiegu dynamiki środka masy dla modelu analitycznego (wykres przedstawiony linią ciągłą) i dla symulacji (punkty połączone linią przerywaną). Wyniki obliczeń numerycznych pokazują dużą zbieżność z rozwiązaniem analitycznym. Potwierdza to jednocześnie wnioski zawarte w pracy [12], że dla małych $x_0 < 0,05L$ model analityczny może dobrze przybliżać dynamikę łańcuchów.

Na rysunku 6.2 A) widzimy, że trajektoria środka masy uzyskana numerycznie i dla modelu analitycznego są bardzo zbliżone. Odległość między pozycją początkową i najniższą środka masy zdefiniujemy jako $d = y^\gamma(0) - y^\gamma(h_{max})$, a czas osiągnięcia pozycji najniższej oznaczać będziemy $t_d$. Badając szczegóły widzimy, że odległość w symulacji wyniosła $d = 0,2536\ m$. Dla modelu teoretycznego wartość ta wynosi $L/4 = 0,255\ m$. W symulacji czas osiągnięcia pozycji minimalnej dla środka masy wyniósł $t_d = 0,3844\ s$.

Analizując rysunek 6.2 B), jako pierwszy wniosek zauważyć można, że prędkość środka masy łańcucha dąży do zera, gdy czas dąży do $t(L)$, czyli osiągnięcia przez koniec łańcucha

minimalnej pozycji ($h \to L$). Warto zwrócić uwagę, że w tym momencie prędkość końca łańcucha osiąga nieskończoność, co pokazane zostało w rozdziale 4.1 i w pracy [73]. Dla kontrastu, na wykresie 6.2 C) widzimy, że przy $t \to t(L)$ przyspieszenie środka masy rośnie nieskończenie dla rozwiązania analitycznego. W rozwiązaniu numerycznym, przyspieszenie gwałtownie rośnie, ale jest oczywiście skończone. Na wykresie przyspieszenia obserwujemy również silne oscylacje, gdy środek masy jest bliski osiągnięcia pozycji minimalnej. Z dyskusji przeprowadzonej w poprzednim rozdziale 4.3 wiemy, że jest to związane z dyskretyzacją modelu. Spodziewany się, że dla większych $n$, rozwiązanie numeryczne będzie zbliżać się do wyniku otrzymanego dla modelu analitycznego. Porównamy więc długość $d$ i czas spadku $t_d$ środka masy, wyznaczone w symulacjach z wynikami dla modelu analitycznego ($d = L/4$ i $t_d = t(L)$). Rezultaty obliczeń dla łańcucha o długości $L = 1,02\ m$, masie $M = 0,0208\ kg$ i $n = 101, 201, ..., 1001$ przedstawia wykres 6.3.

Na rysunku 6.3 możemy zobaczyć, że dystans $d$ jaki pokonuje środek masy w czasie $t_d$, osiąga stabilność dla $n > 600$. Dla symulacji z maksymalnym badanym parametrem $n = 1001$, dystans ten wyniósł $d^{1001} = 0,2547\ m$ i odpowiadający mu czas to $t_d^{1001} = 0,3859\ s$. Porównując te wartości z rezultatami dla modelu analitycznego, błąd względny dla dystansu i czasu spadku równy jest odpowiednio $1,255 \times 10^{-3}$ i $4,033 \times 10^{-3}$. Różnice te wynikają z tego, że w symulacji komputerowej początkowy kształt łańcucha był dyskretną krzywą łańcuchową. Dlatego dystans, który ma do przebycia środek ciężkości $\gamma$, jest mniejszy od dystansu dla modelu analitycznego o około $1,447 \times 10^{-3}\ m$, co wpłynęło na skrócenie czasu spadku. Widzimy, że obliczenia numeryczne i wynik analityczny są bardzo zbieżne. Potwierdza to poprawność modelu dyskretnego i sensowność użycia technik komputowych do dalszej analizy. W następnej części dokonamy analizy przyspieszeń i naprężeń występujących w punkcie zaczepienia łańcucha, dla różnych początkowych konfiguracji łańcucha.

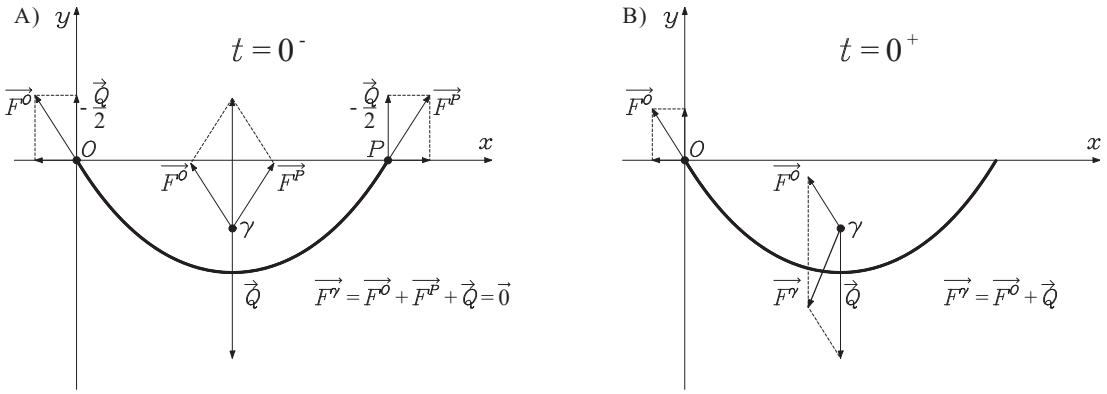



**Rysunek 6.3:** Dystans i czas spadku środka masy $\gamma$. Rysunek A) przedstawia dystans $d$ jaki pokonał środek masy od położenia początkowego do osiągnięcia pozycji minimalnej. Linia przerywana przedstawia dystans $L/4$ dla modelu analitycznego. Rysunek B) prezentuje wykres czasu spadku środka masy $t_d$, w którym osiągnął on pozycję minimalną. Linią przerywaną oznaczono czas spadku środka masy dla modelu analitycznego $t(L)$. Obliczenia numeryczne wykonano dla łańcuchów o długości $L = 1,02\ m$, masie $M = 0,0208\ kg$ spadających z przyspieszeniem $g = 9,81\ m/s^2$ i zbudowanych z $n = 101, 201, ..., 1001$ segmentów. Początkowa odległość między segmentami swobodnie wiszącego łańcucha wynosiła $x_0 = 0,05\ m$.

## 6.2. Analiza sił w chwili początkowej spadku łańcucha

Analizę naprężeń występujących w łańcuchu zaczniemy od analizy rozkładu sił działających na punkt zaczepienia $O$ w stanie równowagi $t(0^-)$ oraz w chwili $t(0^+)$, w której zwolniono koniec w punkcie $P$. Podobne rozumowanie zostało przeprowadzone w pracy [15], ale autorzy ograniczyli się jedynie do eksperymentów dla przypadku, gdy $x_0$ jest bliskie 0 oraz $L$. Dla przypadku, gdy $x_0 \to L$, autorzy odnotowali nieciągłości dla obu składowych siły działającej w punkcie $O$ w momencie, gdy łańcuch zaczął spadać. W dalszej części zbadamy dokładnie ten przypadek i rozszerzymy analizę sił działających w punkcie $O$ na początku spadku, dla łańcucha z końcami oddalonymi od siebie od $x_0 = 0,1$ do $1,02\ m = L$. W tym celu przeprowadzimy podobne symulacje do tych wykonanych w paragrafie 5.2. Wartości sił w punkcie

$O$ na początku spadku porównamy do sił działających na punkt wsparcia w momencie, gdy łańcuch wisiał w równowadze. Rozkład sił dla łańcucha w równowadze przedstawia schemat 6.4 A) a rysunek 6.4 B) przedstawia sytuację w chwili, gdy usunięto podporę $P$ i rozpoczął się spadek łańcucha.




**Rysunek 6.4:** Rozkład sił działających na łańcuch w równowadze i na początku spadku. Rysunek A) przedstawia schemat łańcucha wiszącego w równowadze w polu grawitacyjnym, w chwili oznaczonej $t = 0^-$. Kształt łańcucha jest krzywą łańcuchową. Siła związana z grawitacją, działająca na środek masy $\gamma$, oznaczona jest jako $\vec{Q}$. Pionowe składowe sił $\vec{F^O}$ i $\vec{F^P}$ działających w punktach wsparcia $O$ i $P$ są równe $-\vec{Q}/2$. Rysunek B) przedstawia układ sił działających w punkcie $O$, w chwili $t = 0^+$, gdy koniec łańcucha zawieszony w punkcie $P$ został zwolniony. W chwili tej pojawiła się siła $\vec{F^\gamma}$ działająca na środek masy łańcucha.

### 6.2.1. Układ sił przed spadkiem łańcucha $t = 0^-$

Na rysunku 6.4 A) przedstawiony został schematycznie rozkład sił działających na łańcuch wiszący w stanie równowagi w polu grawitacyjnym z przyspieszeniem $g$. Stan równowagi oznaczać będziemy jako $t = 0^-$. Kształt wiszącego łańcucha w polu grawitacyjnym opisany jest przez równanie krzywej łańcuchowej omawiane w części 2.1.2. Siłę działającą na środek masy $\gamma$, związaną z grawitacją, oznaczymy przez $\vec{Q}$. Siłę tę równoważą podpory $O$ i $P$,

na które działają siły $\vec{F^O}$ i $\vec{F^P}$ o pionowych składowych, równych $-\vec{Q}/2$. Wartości tych sił wynoszą $F_y^O = F_y^P = Mg/2$ i jak widać nie są one zależne od rozwarcia łańcucha $x_0$. Dla punktu podparcia $O$ wartość poziomej składowej siły wyznaczyć można z zależności trygonometrycznej $F_y^O/F_x^O = \mathrm{tg}(\alpha)$, gdzie $\alpha$ jest kątem między styczną do krzywej łańcuchowej w punkcie $O$ a osią $x$. Jak pokazaliśmy w sekcji 2.1.2, krzywa łańcuchowa może być w prosty sposób opisana przez funkcję $\varphi(s)$, gdzie $s$ opisuje długość łuku. W tej notacji, kąt $\alpha$ równy jest $\varphi(0)$ i do jego obliczenia pomocny będzie wzór (2.12) z mnożnikami Lagrange'a wyznaczonymi z równań (2.14). Wartość pionowej i poziomej składowej siły działającej na punkt $O$, w chwili $t = 0^-$, wyznaczyć możemy z zależności:

$$F_x^O(0^-) = \frac{\lambda_1 Mg}{L}, \qquad F_y^O(0^-) = \frac{Mg}{2}. \tag{6.4}$$

Dla przykładu, dla łańcucha o długości $L = 1\ m$ i $x_0 = 0,75\ m$ przedstawionego na rysunku 6.4, parametr $\lambda_1 = -0,0383\ m$.

### 6.2.2. Układ sił w chwili spadku łańcucha $t = 0^+$

Zakładamy, że w chwili $t = 0$, koniec łańcucha został uwolniony z punktu $P$ i łańcuch zaczyna spadać. Sytuacja ta przedstawiona jest na schemacie 6.4 B). Moment ten oznaczać będziemy przez $t = 0^+$. Siły działające w punkcie $P$ znikają i w tym momencie na środek masy zaczyna działać nowa siła $\vec{F}^\gamma(0^+)$. Siła działająca w punkcie $O$ również ulegnie zmianie i będzie równa:

$$\vec{F}^O(0^+) = \vec{F}^\gamma(0^+) - \vec{Q}. \tag{6.5}$$

Znalezienie wartości tej siły polegać będzie na znalezieniu wartości $\vec{F}^\gamma(0^+) = M\vec{a}^\gamma(0^+)$, czyli wyznaczaniu przyspieszenia środka masy łańcucha $\vec{a}^\gamma(0^+)$. Do obliczenia $\vec{a}^\gamma(0^+)$ wymagana jest znajomość wartości przyspieszeń $\ddot{\varphi}_i(0)$, które obliczyć możemy wstawiając kąty $\varphi_i(0)$ opisujące kształt krzywej łańcuchowej i prędkości $\dot{\varphi}_i(0) = 0$ do równań ruchu (2.56). Przyspieszenie poszczególnego ogniwa w układzie $xy$, w chwili $t = 0$, wyznaczyć możemy wówczas

następująco:

$$\begin{aligned} a_{x,i}(0) &= -\sum_{j=1}^{i-1} l\ddot{\varphi}_j(0)\sin\varphi_j(0) - \frac{1}{2}l\ddot{\varphi}_i(0)\sin\varphi_i(0), \\ a_{y,i}(0) &= \sum_{j=1}^{i-1} l\ddot{\varphi}_j(0)\cos\varphi_j(0) + \frac{1}{2}l\ddot{\varphi}_i(0)\cos\varphi_i(0). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Przyspieszenie środka masy w chwili $t = 0^+$ wyrazić możemy za pomocą następujących wzorów:

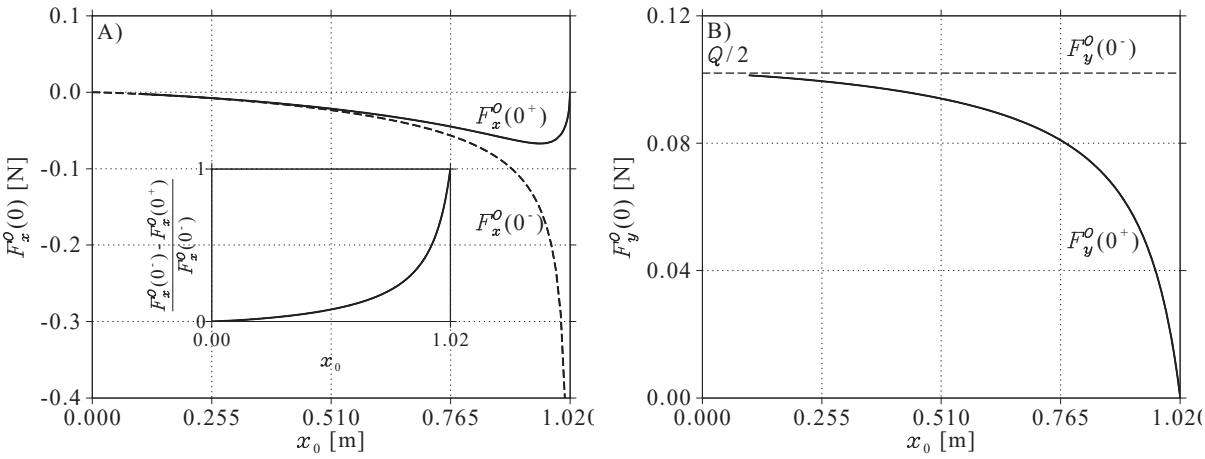
$$a_x^\gamma(0^+) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{x,j}(0), \qquad a_y^\gamma 0(^+) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{y,j}(0^+). \tag{6.7}$$

### 6.2.3. Porównanie sił działających na punkt $O$ w chwili $t = 0^-$ i $t = 0^+$

Stosując powyższe rozumowanie wyliczyliśmy wartości siły działającej w punkcie podparcia łańcucha $O$ dla $t = 0^+$ i porównaliśmy z wartościami obliczonymi dla łańcucha w równowadze $t = 0^-$. Obliczenia wykonaliśmy dla $x_0$ w przedziale od $0,1\ m$ do $1,02\ m$. Rezultaty tych obliczeń przedstawiają wykresy 6.5.

Analiza pionowej składowej siły działającej na punkt zaczepienia łańcucha wydaje się być prostsza. Dla łańcucha złożonego, składowa pionowa przyspieszenia $a_y^\gamma(0^+)$ równa jest $-g/2$. Zgodnie z wcześniejszymi obliczeniami odpowiada to sile działającej w punkcie $O$ o wartości $F_y^O(0^+) = Mg/2$. Gdy odległość między końcami łańcucha rośnie, wartość pionowej składowej siły maleje i osiąga wartość 0 dla łańcucha całkowicie rozciągniętego ($x_0 = L$). Z wykresu 6.5 B) wynika również, że w porównaniu z łańcuchem w równowadze różnica w wartości pionowej składowej siły rośnie wraz ze wzrostem $x_0$ osiągając wartość maksymalną równą $Mg/2$ dla $x_0 = L$. Podczas spadku łańcucha z dużym początkowym rozwarciem zaobserwować można zatem nieciągłość w wartości tej siły. Tę nieciągłość zaobserwowano podczas eksperymentów i opisano w pracy [15].

Na wykresie 6.5 A) widzimy, że przebieg funkcji $F_x^O(0^+)$ nie jest do przewidzenia w prosty sposób. Dla łańcucha złożonego wartość składowej poziomej siły $F_x^O(0^+)$ zgodnie z intuicją jest zerowa. Gdy odległość $x_0$ między końcami łańcucha rośnie, w punkcie $O$ pojawia się siła o niezerowej składowej poziomej. Wartość tej składowej maleje od 0 do $-0,0671\ N$

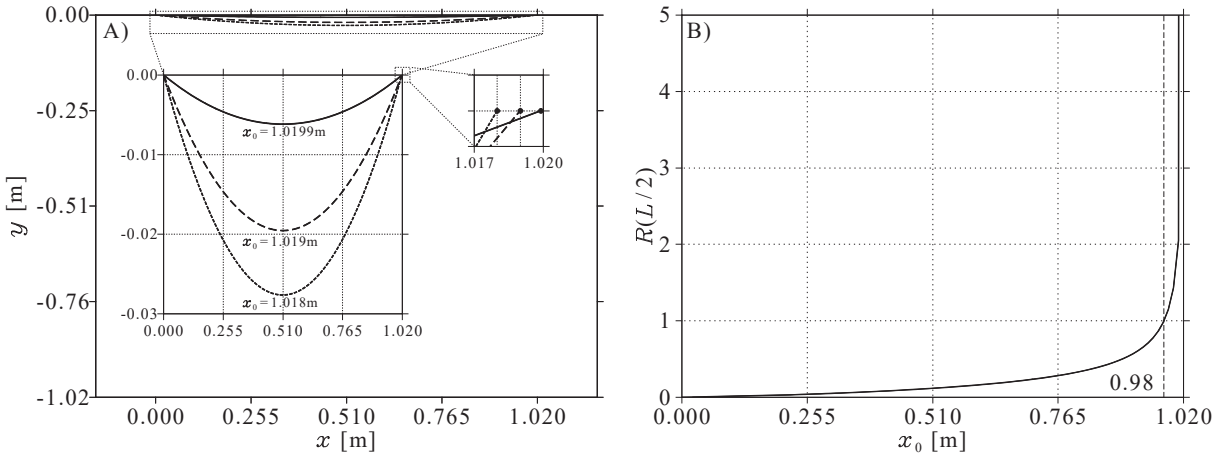



**Rysunek 6.5:** Siły działające na podporę łańcucha w chwili $t = 0^-$ i $t = 0^+$. Rysunek A) przedstawia poziomą $F_x^O$, rysunek B) pionową $F_y^O$ składową siły $\vec{F}^O$ działającej na punkt wsparcia łańcucha $O$ w stanie równowagi $t = 0^-$ (linia przerywana) i w chwili rozpoczęcia spadku $t = 0^+$ (linia ciągła). Obliczenia wykonano dla łańcuchów o długości $L = 1,02\ m$, masie $M = 0,0208\ kg$ składających się z $n = 229$ segmentów i z końcami odległymi o $x_0$ od 0 do $L$. Na rysunku A) umieszczony został dodatkowo wykres pokazujący błąd względny pomiędzy $F_x^O(0^-)$ i $F_x^O(0^+)$.

dla $x_0 = 0,96\ m$ (0,94L). Po tym znów szybko rośnie osiągając zero dla łańcucha całkowicie rozciągniętego ($x_0 = L$). Interesującym przypadkiem jest tu również wartość składowej poziomej siły dla $x_0 = L$ w stanie równowagi. Widzimy, że wartość $F_x^O(0^-)$ dąży do nieskończoności dla $x_0 \to L$. Różnica między wartością tej siły w stanie równowagi a wartością w chwili początkowej spadku może być zatem bardzo duża. W pracy [15] autorzy odnotowali nieciągłość w chwili rozpoczęcia spadku również dla tej składowej. Według autorów, nieciągłości te spowodowane są gwałtownym spadkiem naprężeń w punkcie zaczepienia w momencie zwolnienia drugiego końca łańcucha. Jak wynika z powyższej analizy, efekt ten jest raczej naturalną konsekwencją układu sił działających na łańcuch w stanie równowagi i na początku spadku.

Warto tu również odnotować, że rozciągnięcie łańcucha do pozycji całkowicie poziomej nie jest łatwe. Podczas przygotowania doświadczeń spadku łańcucha, łańcuch o długości

$L = 1,02\ m$ udało się rozciągnąć na odległość $x_0 = 1,019\ m$. Efekt ten widać również na rysunku z wynikami doświadczeń w pracy [73]. Wykres 6.6 A) przedstawia krzywe łańcuchowe o długości $L = 1,02\ m$, których końce wiszą na jednym poziomie i odległość między końcami bliska jest długości krzywej. Dla krzywej z $x_0 = 1,0199\ m$ (do pełnego rozciągnięcia łańcucha pozostaje odległość $0,1\ mm$) ugięcie krzywej od poziomu wynosi aż $0,006\ m$. Drugi z wykresów 6.6 B) pokazuje promień krzywizny krzywej łańcuchowej w punkcie środkowym w zależności od $x_0$. Promień krzywizny zaczyna gwałtownie rosnąć od $x_0 > 0,98\ m$ $(x_0 = 0,96L)$.




**Rysunek 6.6:** Kształt krzywych łańcuchowych dla $x_0 \approx L$. Na rysunku A) przedstawiono, w dużym przybliżeniu, kształt krzywych łańcuchowych, których końce zawieszono w odległości $x_0 = 1,018\ m$, $1,019\ m$ i $1,0199\ m$ bliskiej długości $L = 1,02\ m$. Wykres B) przedstawia promień krzywizny $R$ w punkcie $L/2$ dla krzywych łańcuchowych z $x_0 = 0, ..., L$, gdzie $L = 1,02\ m$. Dla $x_0 = 0,98\ m$ rozpoczyna się gwałtowny wzrost wartości promienia krzywizny.

## 6.3. Układ sił podczas spadku łańcucha

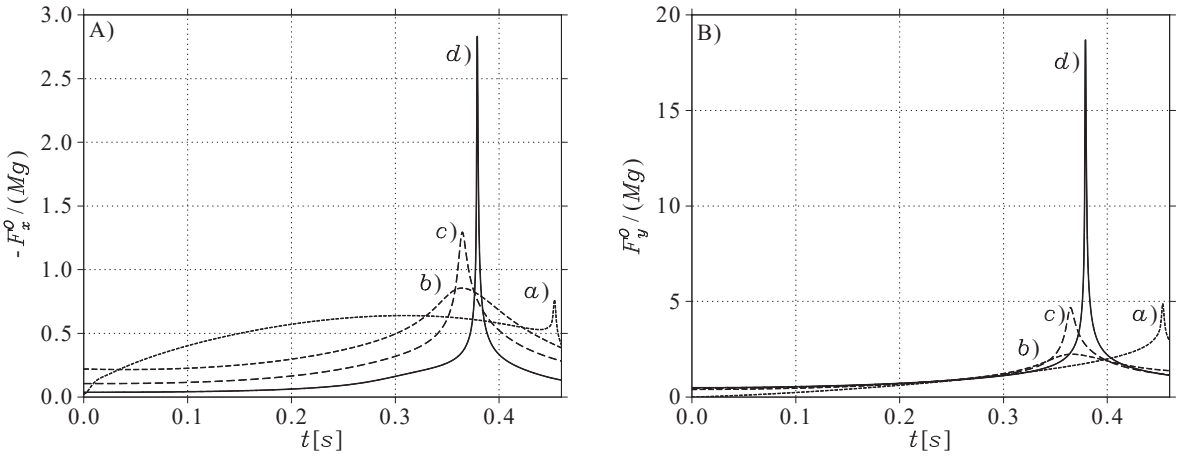
W tym paragrafie badać będziemy rozkład sił w punkcie zaczepienia $O$ podczas spadku łańcucha (dla $t > 0$). Na początku przeprowadziliśmy szereg obliczeń w celu porównania

wyników symulacji komputerowych z eksperymentami laboratoryjnymi przeprowadzonymi przez Géminarda i Vanela w pracy [15]. W testach użyliśmy modelu ze złączami sprężystoodyssypatywnymi opisanymi w rozdziale 2.5.1 oraz pracy [52]. Przy wyborze parametrów modelu matematycznego pod uwagę braliśmy maksymalne wartości przyspieszenia otrzymanego w eksperymentach i symulacjach. Ostatecznie wybraliśmy model ze złączami tylko tłumionymi z parametrem $r = 1,113 \times 10^{-6}\ Nms$. Dla tej wartości parametru $r$ otrzymaliśmy najlepszą zbieżność z eksperymentami przeprowadzonymi przez Géminarda i Vanela. Dla eksperymentów z $x_0 < 0,3\ m$ lepsze rezultaty otrzymaliśmy dla $r = 1 \times 10^{-7}\ Nms$, lecz dla większych wartości $x_0$ zbieżność wyników była znacznie gorsza. Warto również wspomnieć, że wartość współczynnika tłumienia przyjęta do obliczeń w tej części pracy jest różna od wartości wybranej w poprzednim rozdziale ($r = 2,163 \times 10^{-5}\ Nms$), gdy pod uwagę braliśmy zgodność położenia końca łańcucha otrzymanego w symulacjach i eksperymentach.

Podobnie jak w części 5.2 przeprowadziliśmy obliczenia sił działających na punkt $O$ dla wybranych konformacji początkowych *a*) $x_0 = 1,019\ m$, *b*) $x_0 = 0,765\ m$, *c*) $x_0 = 0,51\ m$ i *d*) $x_0 = 0,255\ m$. Dla tych konfiguracji początkowych przeprowadziliśmy obliczenia numeryczne w celu wyznaczenia przyspieszeń środka masy $\gamma$ i wyznaczyliśmy siłę działającą na punkt $O$ za pomocą wzoru (6.5). Rysunek 6.7 przedstawia ewolucję składowych siły działającej w punkcie $O$ dla doświadczeń referencyjnych *a*) – *d*).

Na wykresach 6.7 można łatwo zauważyć, że w każdym z przypadków istnieje maksimum siły działającej na podporę. Dodatkowo widzimy, że dla doświadczeń *b*), *c*) i *d*) maksymalna wartość obu składowych siły rośnie dla łańcuchów z mniejszym rozwarciem $x_0$ i maksimum osiągane jest w coraz dłuższym czasie. Wyniki dla przypadku *a*) znacznie różnią się od pozostałych. Pozioma składowa siły osiąga maksymalną wartość w czasie $t = 0,3\ s$ i $t = 0,453\ s$. Pierwsze maksimum ma podobną naturę jak w pozostałych przypadkach i, zgodnie z oczekiwaniem, występuje w czasie krótszym niż w eksperymencie *b*). Drugie maksimum poziomej składowej siły osiągane jest w momencie bliskim osiągnięcia przez łańcuch minimalnego położenia.

Dla przypadku *a*) widzimy również, że składowa pionowa siły osiąga wartość maksymalną

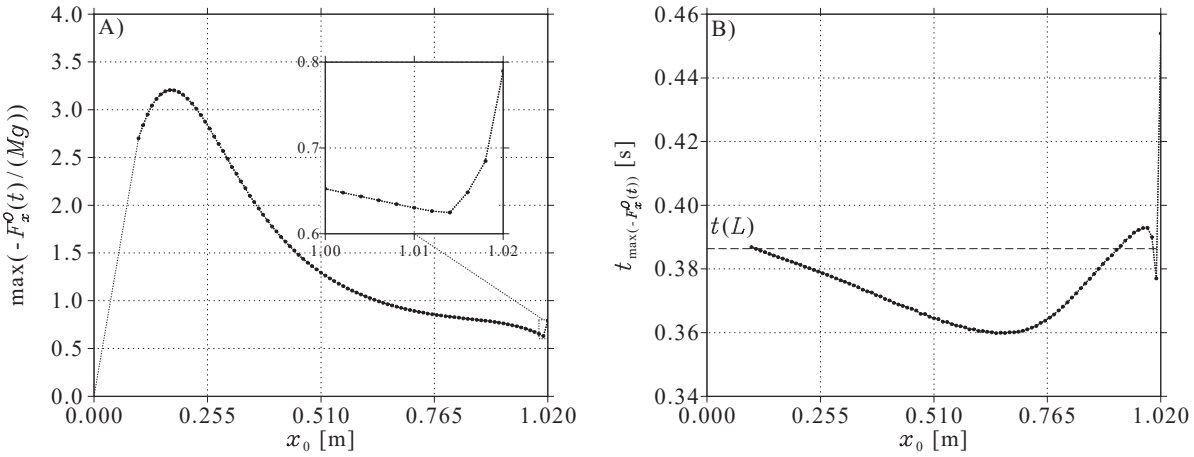



**Rysunek 6.7:** Siły działające na punkt $O$ w symulacjach $a$) – $d$). Rysunki przedstawiają składową poziomą A) i pionową B) siły działającej na punkt wsparcia łańcucha $O$ w jednostkach $Mg$. Początkowy kształt łańcucha użyty w symulacjach odpowiadał doświadczeniom dla początkowego rozwarcia łańcucha $a$) $x_0 = 1,019\ m$, $b$) $x_0 = 0,765\ m$, $c$) $x_0 = 0,510\ m$ oraz $d$) $x_0 = 0,255\ m$.

większą niż w przypadku $b$) i zbliżoną do wartości w przypadku $c$). Wyniki otrzymane w symulacjach są porównywalne do tych, które wyznaczone zostały eksperymentalnie w pracy [15]. Rezultaty otrzymane dla przypadku $a$) pokazują ponownie, że dynamika spadku lin, których końce są początkowo bardzo oddalone od siebie $x_0 \to L$ jest bardziej złożona. Analiza tego zagadnienia wydaje się wskazana ze względu na możliwość użycia w zastosowaniach technicznych takich jak trakcje elektryczne, czy konstrukcje cięgnowe.

### 6.3.1. Analiza siły poziomej w punkcie wsparcia łańcucha

Analogicznie jak w części 5.2, szczegółową analizę rozpoczniemy od wyznaczenia maksymalnych wartości siły poziomej i czasu ich osiągnięcia dla łańcuchów z różnym początkowym rozwarciem końców od $0,1\ m$ do $1,02\ m$. Rezultaty tych obliczeń przedstawia wykres 6.8. Ze względu na fakt, że wartości sił dla wybranego czasu całkowania są zawsze ujemne, w dalszej dyskusji dla uproszczenia przyjmować będziemy wartość $-F_x^O$.

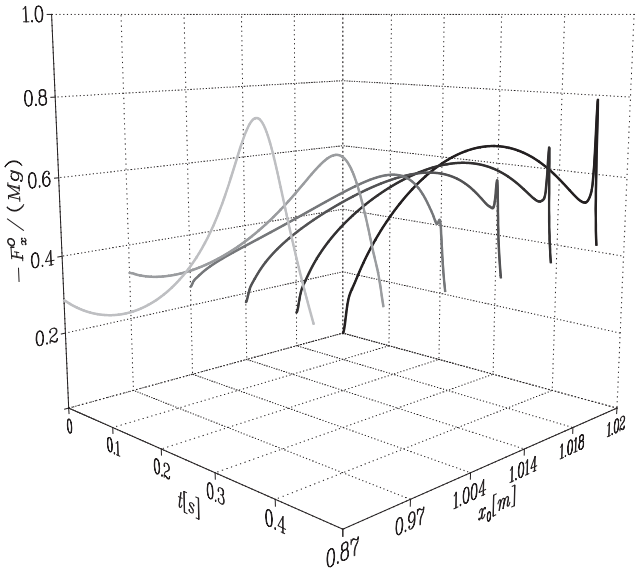



**Rysunek 6.8:** Maksymalne wartości siły poziomej w punkcie wsparcia $O$, w zależności od $x_0$. Rysunek A) przedstawia wartość maksymalne wartości $-F_x^O$ w jednostkach $Mg$ w zależności od początkowego wychylenia końców łańcucha. Na rysunku B) pokazano czas $t_{max}$, dla którego osiągnięto maksymalną wartość siły. Rezultaty uzyskane dla łańcuchów z $x_0 = 0,1...1,02\ m$ ze skokiem $0,01\ m$ oznaczono jako punkty połączone przerywaną linią. Dla $x_0 < 0,1\ m$ narysowane zostały wartości teoretyczne. Otrzymane rezultaty odpowiadają rezultatom doświadczalnym uzyskanym przez Géminarda i Vanela w pracy [15] (Fig. 4 and Fig. 3).

Wykresy 6.8 przedstawiają odpowiednio wartości maksymalne poziomej składowej siły działającej na $O$ oraz czas, dla którego to nastąpiło, jako funkcję początkowego rozwarcia łańcucha $x_0$. Z rozważań teoretycznych wiemy, że dla łańcucha złożonego ($x_0 = 0$), siła $-F_x^O$ równa jest zawsze 0. Dla $x_0 > 0$ siła ta jest niezerowa i osiąga największą wartość równą $3,2046\ Mg$ dla $x_0 = 0,17\ m$ ($x_0 = 0,1667L$). Następnie jej wartość spada i w

$x_0 = 1,01\ m$ ($x_0 = 0,99L$) osiąga minimum równe $0,6302\ Mg$. Dla następnych wartości $x_0$ wartość tej funkcji zaczyna gwałtownie rosnąć. Dodatkowe informacje wyczytać możemy z wykresu 6.8 B). Wykres ten pokazuje, że maksymalna wartość siły $-F_x^O$ osiągana jest w najkrótszym czasie $t = 0,3578\ s$ dla łańcucha z $x_0 = 0,67\ m$ ($x_0 \approx 0,657L$). Widzimy również, że dla $x_0 = 0,99\ m$ istnieje lokalne maksimum $0,3929\ s$. Dalej czas osiągnięcia maksymalnej wartości siły gwałtownie maleje i dla $x_0 = 1,01\ m$ pojawia się nieciągłość. Dla kolejnej wartości $x_0 = 1,02\ m$ czas osiągnięcia maksymalnej wartości wydłużył się do $t = 0,4539\ s$. Różnica między czasem osiągnięcia wartości maksymalnej dla $x_0 = 1,01\ m$ i $x_0 = 1,02\ m$ wynosi około $0,06\ s$, co stanowi 13% czasu spadku. W celu zbadania tego zjawiska, wykonaliśmy dodatkowe obliczenia dla $x_0 = 0,87...1,02\ m$. Przebieg funkcji $-F_x^O(t)$ dla łańcuchów z bardzo dużym rozwarciem przedstawia rysunek 6.9.

Wykres 6.9 pokazuje przebieg funkcji $-F_x^O(t)$ dla $x_0 \geqslant 0,87\ m$. Powyżej $x_0 > 0,96\ m$ obserwujemy zmianę przebiegu tej funkcji w porównaniu do mniejszych wartości $x_0$. Dla $x_0 = 1,004\ m$ pojawia się drugie maksimum, które dla $x_0$ coraz bliższych $L$ jest coraz większe. W szczególności dla $x_0 > 1,014\ m$ maksimum to jest większe od pierwszego maksimum lokalnego i tym samym staje się maksimum globalnym. W tym momencie pojawia się zatem nieciągłość w wykresie 6.8 prezentującym zależność maksymalnej siły $-F_x^O(t)$ od $x_0$. Widzimy, że wartość $x_0 = 0,96\ m$, powyżej której nastąpiła zmiana przebiegu siły $-F_x^O(t)$ jest wartością dla której $F_x^O(0^+)$ osiąga minimum (rysunek 6.5).

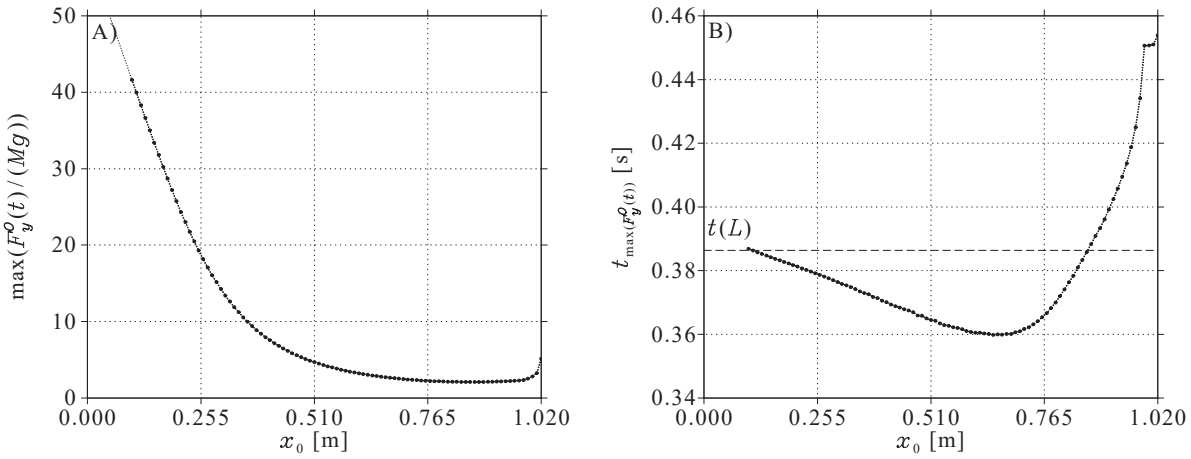



**Rysunek 6.9:** Pozioma składowa siły $-F_x^O(t)$ wyrażona w jednostkach $Mg$ dla łańcuchów z początkową odległością między końcami $x_0 = 0,87,\ 0,97,\ 1,004,\ 1,014,\ 1,018,\ 1,02\ m$. Wykresy pokazują zmianę wypukłości funkcji dla łańcuchów pomiędzy $x_0 = 0,97$ m i $x_0 = 1,004$ m. Podobny efekt obserwujemy na rysunku 6.7.

## 6.3.2. Analiza siły pionowej w punkcie wsparcia podczas spadku łańcucha

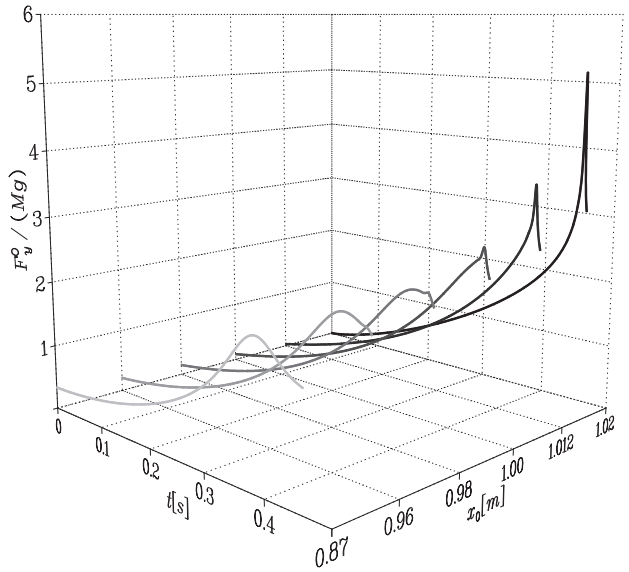
Podobnie jak dla składowej poziomej siły działającej na punkt wsparcia łańcucha, sprawdzimy, jak wygląda zależność maksymalnych wartości pionowej składowej siły podczas spadku. Rezultaty obliczeń przedstawiają wykresy 6.10.

Na wykresie 6.10 A) widzimy, że dla łańcuchów o małym $x_0$ wartość pionowej składowej przyspieszenia jest największa. Maksymalną wartość odnotowaliśmy dla $x_0 = 0,1\ m$ i wynosi ona $41,6177\ Mg$. Jest to zgodne z teorią, ponieważ dla łańcucha złożonego $F_y^O$ dąży do nieskończoności, gdy położenie środka masy zbliża się do minimalnego położenia. Pokazane to zostało w paragrafie 6.1. Wartość minimalna siły równa $2,0982\ Mg$ wypada dla $x_0 =$




**Rysunek 6.10:** Maksymalne wartości siły pionowej w punkcie wsparcia $O$, w zależności od $x_0$. Rysunek A) pokazuje wartości maksymalne pionowej składowej siły $F_y^O$ w jednostkach $Mg$. Rysunek B) pokazuje czas, dla którego wystąpiło maksimum. Wyniki otrzymano numerycznie dla łańcuchów, których początkowy dystans pomiędzy końcami wynosił $x_0 = 0,1...1,02\ m$ ze skokiem $0,01\ m$ (punkty połączone przerywaną linią). Dla $x_0 < 0,1\ m$ narysowane zostały teoretyczne wyniki. Wykresy przedstawione tutaj odpowiadają wynikom eksperymentów przeprowadzonych przez Géminarda i Vanela w pracy [15] (Fig. 4 and Fig. 3).

$0,86\ m$ ($x_0 = 0,8431L$). Dla $x_0 > 0,86\ m$ maksymalna wartość siły rośnie bardzo powoli, a od $x_0 = 0,97\ m$ funkcja rośnie gwałtownie. Analizując wykres 6.10 B) przedstawiający czas, w którym siła osiąga wartość maksymalną, widzimy że przy $x_0 = 0,97\ m$ pojawia się nieciągłość. Szczegółowa analiza pokazała podobny rezultat jak w przypadku poziomej składowej przyspieszenia. Rysunek 6.11 pokazuje, że dla $x_0 = 0,97\ m$ pojawia się drugie maksimum lokalne, które wraz ze wzrostem $x_0$ staje się globalnym maksimum funkcji $F_y^O(t)$. Drugie maksimum staje się większe od pierwszego już dla $x_0 = 0,98\ m$ i dodatkowo dla $x_0 > 1\ m$ ($x_0 > 0,9804L$) pierwsze maksimum zanika. Wartość $x_0$, dla której pojawia się nieciągłość wydaje się nieprzypadkowa i powiązać ją można z wartością minimalną poziomej składowej siły $F_x^O(0^+)$ przy rozpoczęciu spadku. Podobne zjawisko występowało dla siły poziomej opisanej w poprzednim paragrafie.




**Rysunek 6.11:** Pionowa składowa siły $-F_x^O(t)$ wyrażona w jednostkach $Mg$ dla łańcuchów z początkową odległością między końcami $x_0 = 0,87,\ 0,96,\ 0,98,\ 1,00,\ 1,012,\ 1,02\ m$. Wykresy pokazują, że dla $x_0 = 0,98\ m$ pojawiają się dwa lokalne maksima. Podobny efekt obserwujemy na rysunku 6.7.

## 6.4. Podsumowanie

Biorąc pod uwagę zarówno poziomą jak i pionową składową przyspieszenia środka masy widzimy, że początkowa wartość tych składowych, w szczególności składowej poziomej, ma znaczący wpływ na dalszy przebieg przyspieszeń w czasie spadku. W chwili początkowej, przy braku prędkości, przyspieszenia zależne są wyłącznie od kształtu wiszącego łańcucha. Precyzyjne obliczenia numeryczne pokazały, że zmiana dynamiki łańcucha dla $x_0$ bliskich $L$ wynika ze zmiany kształtu (krzywizny) krzywej łańcuchowej, który ma wpływ na rozkład przyspieszeń i tym samym sił w chwili początkowej spadku. Efekt ten widoczny jest również

na rysunku 6.6 wyjaśniającym problem maksymalnego rozciągnięcia łańcucha do pozycji poziomej. Dla łańcucha z $x_0 = 0,94L$ wartość przyspieszenia środka masy w chwili rozpoczęcia spadku jest najmniejsza. Analiza sił działających na punkt wsparcia łańcucha podczas spadku pokazała, że dla łańcuchów z $x_0 > 0,94L$ następuje zmiana kształtu funkcji opisującej te siły. Widzimy również, że te wyniki powiązane są z rezultatami obserwowanymi w rozdziale 5 przy analizie przyspieszeń końca łańcucha dla $x_0 \to L$.

# Rozdział 7
# Strzał z bicza

## 7.1. Wstęp

Zagadnienie strzału z bicza było pierwszym zagadnieniem dotyczącym tematyki lin i łańcuchów, którym się zajęliśmy. Prace nad problemem przyspieszeń pojawiających się w poruszających się linach rozpoczęliśmy od analizy pracy [1, 17] dotyczących problemu strzału z bicza. W pracach tych autorzy opisali przypadek bicza o przekroju zwężającym się w kierunku końca bicza, przedstawili równaniu ruchu opisujące ten bicz i przeprowadzili symulację strzału z bicza. W symulacji autorzy przyjęli, że bicz uformowany jest początkowo w kształt pętli, która porusza się w kierunku końca bicza. Autorzy wyjaśnili mechanizm działania strzału z bicza i przedstawili wyniki potwierdzające teorię. Prędkość i przyspieszenie jakiemu poddawany jest koniec bicza, były dla nas inspiracją do głębszej analizy zjawiska. Przeprowadziliśmy podobne obliczenia dla prostego bicza, którego czoło poruszało się początkowo z zadaną prędkością, a koniec ciągnięty był w przeciwnym kierunku ze stałym przyspieszeniem. Wyniki tej analizy zostały opublikowane w pracach [77, 49]. W tym rozdziale przedstawimy podobną analizę, rozszerzoną o nowe eksperymenty. Zanim jednak przejdziemy do tej części, przypomnimy historię tego zagadnienia, podobnie jak uczynili to autorzy pracy [16].

### 7.1.1. Historia problemu

Na początku XX wieku, stosując naukowe metody, zaczęto zastanawiać się, skąd bierze się trzask wydawany przez bicz. Hipotezę, że trzask z bicza jest akustycznym dowodem na przekroczenie przez jego koniec prędkości dźwięku przedstawił w 1905 roku Otto Lummer [78]. Inspiracją dla Lummera były słynne doświadczenia Ernesta Macha i Petera Salchera, którzy stosując metodę fotografii cieniowej wykonali pierwsze zdjęcia fali uderzeniowej wytwarzanej przez pocisk poruszający się z prędkością ponaddźwiękową. Hipoteza Lummera spotkała się z niedowierzaniem. Niestety, w czasach Lummera nie było jeszcze możliwości wykonania filmu przedstawiającego koniec bicza poruszający się z tak dużą prędkością. Pierwszy taki film wykonał Carriére w 1927 roku. W ten sposób potwierdzona została hipoteza, że koniec bicza osiąga prędkości ponaddźwiękowe.

### 7.1.2. Doświadczenia

Ostatnie, najbardziej precyzyjne obserwacje kolejnych faz ruchu bicza wykonane zostały w 1998 roku przez Krehla, Engemanna i Schwenkela i zaprezentowane w pracy [16]. Układ doświadczalny, jaki został zbudowany w celu rejestracji fali uderzeniowej wytworzonej przez koniec bicza łańcucha, był bardzo złożony. Bicz oświetlany był laserem impulsowym o mocy 25 $W$. Częstość impulsów wynosiła 9 $kHz$ a ich czas trwania 20 $ns$. Moc w jednym impulsie wynosiła 200 $kW$. Wiązkę lasera ogniskowano na przesłonie z małym, kolistym otworem. W efekcie otrzymywano niemal punktowe, impulsowe źródło światła, równomiernie oświetlające ekran, przed którym w małej odległości poruszał się koniec bicza. Szybka, cyfrowa kamera filmowała bicz poprzez małe zwierciadło umieszczone blisko przesłony z otworem. Obserwacja bicza odbywała się więc niemal z miejsca, w którym umieszczone było źródło światła. Dzięki temu, możliwe było sfotografowanie cienia obserwowanego obiektu. Kamera zapisywała kolejne obrazy z częstością 9 $kHz$. Obrazy z przetwornika kamery przekazywane były do bufora mogącego pomieścić 1024 obrazów. Przy zapełnionym buforze wpisanie nowego obrazu powodowało usuniecie najstarszego. Wpisywanie kolejnych obrazów przerywał

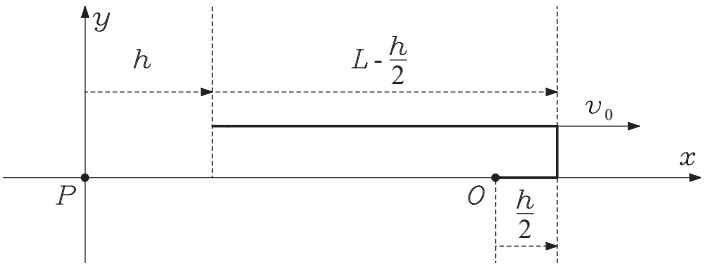
trzask bicza. W ten sposób, po przerwaniu rejestracji, w buforze znajdowały się obrazy z interwału czasowego obejmującego pojawienie się fali uderzeniowej. Na kolejnych klatkach filmu, prócz samego bicza obserwujemy jego cień i cień fali uderzeniowej. Z otrzymanych obrazów można zrekonstruować kształt i położenie końca bicza w krytycznym momencie, tuż przed i tuż po uzyskaniu przez niego maksymalnej prędkości. Analiza tych danych pozwoliła autorom doświadczenia znaleźć współrzędne końca bicza w przestrzeni, w równo od siebie odległych chwilach czasu, wyznaczonych przez rytm impulsowego źródła światła. Z danych otrzymanych w doświadczeniu można było odczytać prędkość poruszającego się końca bicza. Maksymalna prędkość, którą osiągał koniec bicza wynosiła około 750 $m/s$, przeszło dwukrotnie przekraczał prędkość dźwięku. Jeszcze bardziej spektakularny wynik dała analiza przyspieszenia, jakiemu koniec ten podlegał. W końcowym etapie przyspieszania, trwającym blisko 850 $\mu s$, prędkość wzrastała od 340 $m/s$ do 750 $m/s$. Przyspieszenie wynosiło więc prawie $50000g$. Poddanie końca rzemienia przyspieszeniu wynoszącemu $50000g$ oznacza, że jego fragment o masie $10^{-3}$ $kg$ odrywany jest siłą, jakiej trzeba użyć, by podnieść przedmiot o masie 50 $kg$. Zwykły rzemień nie ma z pewnością takiej wytrzymałości, powinien więc ulec zerwaniu. Proste doświadczenie z rzemieniem potwierdza ten fakt. Po kilku strzałach wyraźnie widać, że koniec bicza uległ zniszczeniu. Zdjęcie końca rzemienia, po wykonaniu kilka strzałów przedstawia rysunek w pracy [77].

## 7.2. Model analityczny bicza

Analizę dynamiki bicza zaczniemy od znalezienia rozwiązania analitycznego dla tego zagadnienia. Przyjmujemy, że bicz jest idealnie wiotkim, nierozciągliwym i jednorodnym rzemieniem. Załóżmy, że mamy wyidealizowaną sytuację, w której wyprostowany rzemień porusza się w przestrzeni, bez pola grawitacyjnego, ruchem jednostajnym. W pewnej chwili zostaje on wyhamowany poprzez uchwycenie i zamocowanie jego początku do podpory. Od tego momentu będziemy badać jego ruch. Dla takiej sytuacji możemy przeprowadzić konstrukcję

modelu analitycznego analogicznie jak w przypadku modelu liny spadającej w polu grawitacyjnym 4.1.

Zakładamy, że rzemień będzie jednorodną cienką liną o długości $L$ i masie $M$, ułożoną poziomo i zaczepioną do nieruchomej podpory $O$. Możemy przyjąć, że drugi swobodny koniec znajduje się w punkcie $P$. W chwili początkowej lina porusza się ze stałą prędkością $v_0$ w kierunku poziomym. Podczas tego ruchu, część liny zatrzymuje się. Obserwujemy więc część liny, która jest w ruchu i część nieruchomą. Części te połączone są w pewnym punkcie. Ruch takiej liny opisać można za pomocą zmiennej $h$, określającej odległość końca części ruchomej od pozycji początkowej $P$. Przy tak przyjętej definicji modelu, zmienna $h \in [0,\ 2L]$. Schemat tego modelu pokazuje rysunek 7.1. Podobny model dotyczący bicza zaprezentowany został w pracy [16].




**Rysunek 7.1:** Analityczny model bicza. Na rysunku przedstawiony został schemat bicza podczas lotu. Całkowicie rozciągnięty rzemień początkowo poruszał się w poziomie z prędkością $v_0$. Jego koniec został zatrzymany i zaczepiony w punkcie $O$. W tym momencie swobodny koniec rzemienia znajdował się w punkcie $P$. Dystans jaki przebył koniec rzemienia od punktu $P$ oznaczony został przez zmienną $h$. Podczas lotu, część nieruchoma wydłuża się zgodnie ze wzorem $h/2$, część ruchoma ulega skróceniu i jej długość wynosi $L - h/2$.

Dla tak zdefiniowanego modelu bicza równania ruchu wyznaczyć można w oparciu o zasadę zachowania energii. W tym przypadku energia potencjalna nie występuje i całkowita energia równa jest energii kinetycznej w układzie. Porównanie energii kinetycznej bicza dla

$h = 0$ z energią kinetyczną dla $h > 0$ prowadzi do następującego równania:

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{(2L-h)\,Mv_w^2(h)}{4L}, \tag{7.1}$$

gdzie $v_w(h)$ oznacza prędkość końca bicza po przebyciu dystansu $h$. Z powyższej zależności wyznaczyć można prędkość bicza oznaczoną przez $v_w(h)$ i przyspieszenie $a_w(h)$ wyrażone jako funkcje zmiennej $h$. Dodatkowo wyznaczymy funkcję $t_w(h)$ opisującą zależność czasu lotu końca rzemienia od przebytej drogi. Możliwe będzie zatem przedstawienie wyników w zależności od czasu:

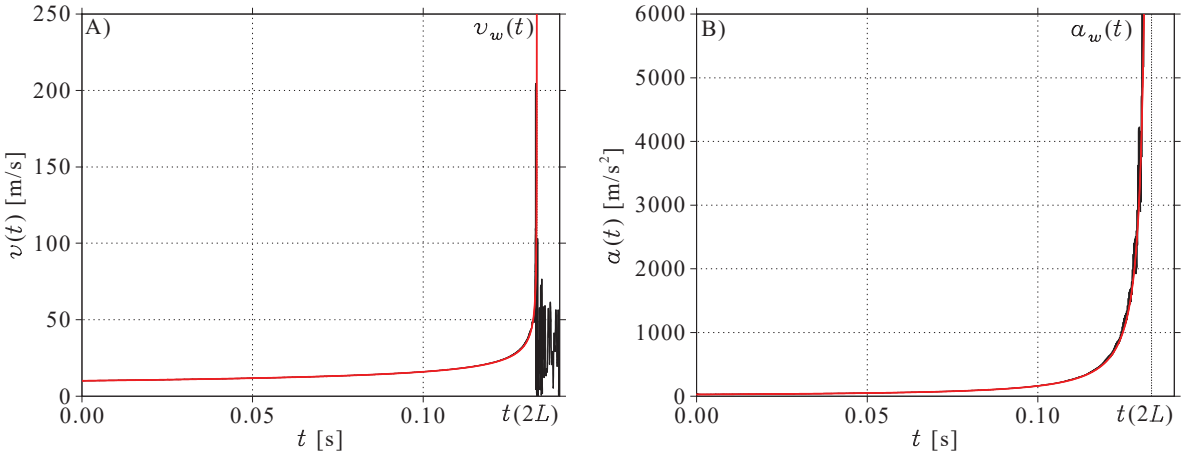
$$\begin{aligned} v_w(h) &= \sqrt{\frac{2L}{2L-h}}v_0, \\ a_w(h) &= \frac{Lv_0^2}{(2L-h)^2}, \\ t_w(h) &= \int_0^h \frac{ds}{v_w(h)} = \frac{4L - \sqrt{2}(2L-h)^{3/2}L^{-1/2}}{3v_0}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Funkcje $v_w$ i $a_w$ są nieciągłe, gdy $h \to 2L$, i w tym przypadku ich wartości rośną do nieskończoności. Podobny efekt występował w przypadku modelu spadającej liny omawianego w części 4.1. Widzimy zatem, że osiągnięcie dużych prędkości przez koniec rzemienia jest teoretycznie możliwe.

### 7.2.1. Symulacja strzału z bicza idealnego

Sprawdzimy, czy podobne rezultaty otrzymamy rozwiązując równania ruchu dla modelu dyskretnego i jaka jest zbieżność wyników z wynikami uzyskanymi analitycznie. W tym celu przeprowadzimy prostą symulację porównawczą stosując równania ruchu dla układu prętów (2.56). Rzemień reprezentować będzie lina dyskretna o długości $L = 1\ m$ o masie $M = 0,1\ kg$, składająca się z $n = 400$ segmentów. Rzemień jest idealnie wiotki, więc współczynniki sprężystości $k = 0$ i tłumienia $r = 0$. Rzemień poruszać się będzie w przestrzeni bez grawitacji ($g = 0$) z prędkością początkową $v_0 = 10\ m/s$. Wartości te są realistyczne, wyznaczone na podstawie prostych pomiarów. Dla tak przyjętych parametrów, czas lotu do chwili osiągnięcia całkowitego zatrzymania wynosić będzie $t_w(L) = 2/15\ s \approx 0,1333\ s$. Wyniki symulacji

porównane z analitycznymi przedstawia rysunek 7.2.




**Rysunek 7.2:** Prędkość i przyspieszenie końca bicza idealnego. Wykres A) przedstawia prędkość, wykres B) przyspieszenie końca bicza wyznaczone z modelu analitycznego oraz w prostej symulacji bicza. Wyniki analityczne $v_w(t)$ i $a_w(t)$ przedstawia czerwona linia, rezultaty numeryczne narysowane są linią czarną. W obliczeniach przyjęto, że długość rzemienia wynosi $L = 1\ m$, masa $M = 0,1\ kg$ a prędkość początkowa rzemienia $v_0 = 10\ m/s$.

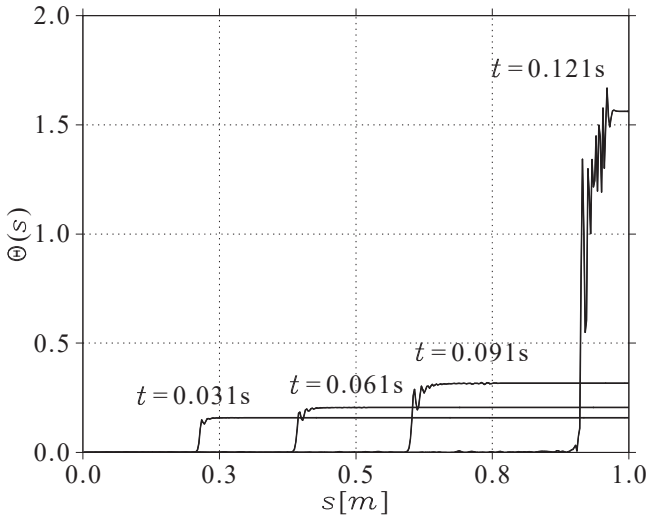
Rysunek 7.2 pokazuje dużą zgodność wyników otrzymanych w obliczeniach analitycznych i numerycznych. Maksymalna prędkość uzyskana w symulacji wynosi $v_{max} = 204,4911\ m/s$ w czasie $0,13297\ s$. Z gwałtownym wzrostem prędkości związany jest również wzrost przyspieszenia, które osiąga tu wielkość $a_{max} = 6 \times 10^6\ m/s^2$. Jeszcze większe przyspieszenia obserwujemy po chwili osiągnięcia maksymalnej prędkości, gdy koniec rzemienia zaczyna wyhamowywać.

Wyjaśnienie przyczyn gwałtownego wzrostu prędkości w ostatniej fazie jest podobne do tego, które przedstawiliśmy dla spadającego łańcucha w części 4.1.1. Z pewnym przybliżeniem możemy powiedzieć, że wzrost prędkości końca rzemienia, to wynik działania prawa zachowania energii. Możemy to zobrazować, pokazując jak w kolejnych fazach ruchu zmienia się rozłożenie energii kinetycznej rzemienia pomiędzy jego segmenty. W przypadku modelu ciągłego dla spadającej liny, pokazaliśmy to korzystając z funkcji $\Theta(s)$ wyrażonej przez wzór

(4.11). W modelu dyskretnym długość łuku $s$ reprezentowana jest przez segmenty łańcucha. Gdy $s \in ((i-1)l, il)$, przy $l = L/n$, wówczas w modelu dyskretnym $s$ wskazuje $i$-ty segment. Gęstość energii kinetycznej $\Theta(s)$ określona jest jako stosunek energii kinetycznej $T(s)$ segmentu wskazanego przez $s$ do długości segmentu $l = L/n$:

$$\Theta(s) = \frac{T(s)}{l}. \tag{7.3}$$

Przy tak przyjętej definicji, funkcja $\Theta(s)$ jest niezależna od parametru dyskretyzacji $n$. Rysunek 7.3 przedstawia gęstość energii w rzemieniu w kilku wybranych chwilach.




**Rysunek 7.3:** Gęstość energii kinetycznej w rzemieniu w kolejnych fazach jego ruchu. W kolejnych chwilach, w których koniec rzemienia osiąga maksymalną prędkość, niemal cała energia kinetyczna zostaje zlokalizowana w jego ostatnim fragmencie. W obliczeniach przyjęto, że długość rzemienia wynosi $L = 1\ m$, masa $M = 0,1\ kg$ a prędkość początkowa rzemienia $v_0 = 10\ m/s$.

Rysunek 7.3 pokazuje, że podczas lotu rzemienia, jego energia kinetyczna, której sumaryczna wartość musi pozostawać stała, skupiona jest w coraz krótszej ruchomej części. Gęstość liniowa energii wtłoczonej w końcowy fragment rzemienia rośnie a w efekcie prędkość ostatnich fragmentów rzemienia osiąga coraz wyższe wartości.

Prędkość osiągnięta w opisywanym wyżej eksperymencie jest całkiem duża, mimo że parametry przyjęte w symulacji nie były dobrane ekstremalnie. Mamy tu jednak do czynienia z sytuacją idealną. W rzeczywistości dużą rolę odgrywa sprężystość, rozciągliwość rzemienia oraz wewnętrzne tarcie lepkie spowalniające ruch rzemienia. Mimo, że prędkość osiągana tutaj jest duża, to jednak prędkość dźwięku $c \approx 340\ m/s$ nie została osiągnięta. Można się zastanowić, jakie parametry symulacji należałoby zmienić, aby taką prędkość osiągnąć. Zarówno analityczne jak i dyskretne równania ruchu można skalować. Daje to możliwość oszacowania wyników symulacji po zmianie parametrów takich jak długości rzemienia $L$ czy jego prędkości początkowej $v_0$ na podstawie znanych już wyników. Z równań (7.2) wynika, że najprostszym sposobem uzyskania większej prędkości końca jest zwiększenie prędkości początkowej $v_0$. Prędkość początkową $\hat{v}_0$, dla której koniec bicza, przy niezmienionych innych parametrach symulacji, osiągnie prędkość dźwięku obliczyć można z prostej zależności:

$$\hat{v}_0 = \frac{c}{v_{max}} v_0. \tag{7.4}$$

Przyjmując dane wyznaczone w opisywanej powyżej symulacji, wyliczyć można, że prędkość początkowa, dla której osiągnięta zostanie prędkość dźwięku wynosi $\hat{v}_0 = 16,6266\ m/s$. Czas, po którym rzemień osiągnie maksymalne położenie $h = 2L$ obliczyć można w następujący sposób:

$$t_w(2L) = \frac{4L}{3v_0}. \tag{7.5}$$

Przyjmując w obliczeniach jako prędkość początkową $\hat{v}_0 = 16,6266\ m/s$, czas lotu skróci się do $t_w(2L) = 0,08019\ s$ w porównaniu z wzorcową symulacją. Obliczenia potwierdzają wyniki tej ilościowej analizy. Przy tych warunkach początkowych, maksymalna prędkość bicza wyniosła $338,4075\ m/s$ i osiągnięta została w czasie zbliżonym do przewidywanego $t = 0,080164\ s$. Ze wzoru (7.5) wynika również, że zmiana długości rzemienia nie wpłynie na prędkość osiąganą przez bicz. Zmiana długości rzemienia wydłuży lub skróci proporcjonalnie czas lotu co powoduje, że prędkość pozostanie bez zmian. Wyniki symulacji również potwierdziły te przewidywania teoretyczne. Widzimy zatem, że osiągnięcie prędkości dźwięku przy pomocy takiego modelu nie jest wcale łatwe, gdyż prędkość początkowa, która potrzebna

jest do osiągnięcia tak dużej prędkości wcale nie jest mała. W rzeczywistości osiągniecie takiej prędkości początkowej wymaga dużego wysiłku lub wydłużenia rękojeści do ponad 2 $m$. Zatem strzał z rzeczywistego bicza wymagać będzie zastosowania innych technik. Zanim zajmiemy się opisem technik, wrócimy do zagadnienia spadku liny i prędkości, jakie może osiągnąć spadająca lina.

### 7.2.2. Prędkość spadającej liny

Zastanowimy się, przy jakich warunkach koniec spadającej liny może osiągnąć prędkość dźwięku. Z równań analitycznych widzimy, że zwiększenie wartości przyspieszenia ziemskiego spowoduje wzrost prędkości spadającej liny. To oczywiście nie wchodzi w rachubę. Okazuje się jednak, że w przeciwieństwie do modelu analitycznego bicza, zwiększenie długości liny ma wpływ na prędkości osiągane przez linę podczas spadku. Zachodzi tu proste prawo skalowania. Przyjmujemy, że znamy wartość maksymalnej prędkości $v_{max}$ i czas jej osiągnięcia $t_{max}$ dla liny o długości $L$. Jeżeli nie zmienimy parametru dyskretyzacji $n$ i zmienimy długość łańcucha na $\hat{L}$, wówczas zachodzą związki:

$$\hat{v}_{max} = v_{max}\sqrt{\frac{\hat{L}}{L}}, \qquad \hat{t}_{max} = t_{max}\sqrt{\frac{\hat{L}}{L}}, \tag{7.6}$$

gdzie $\hat{v}_{max}$ oznaczają maksymalną prędkość, $\hat{t}_{max}$ oznacza czas, w którym osiągnięto maksymalną prędkość dla łańcucha o długości $\hat{L}$. Dla przykładu, dla spadającego łańcucha opisywanego w paragrafie 4.3.1 prędkość maksymalna i odpowiadający jej czas wynosiły $v_{max} = 36,6867\ m/s$ i $t_{max} = 0,3819\ s$. Ze wzorów (7.6) wynika, że dla tej samej symulacji ze zmienioną długością łańcucha $\hat{L} = 2\ m$, maksymalna prędkość wynosić będzie $\hat{v}_{max} = 51,8828\ m/s$ i osiągnięta zostanie w chwili $\hat{t}_{max} = 0,54009\ s$. Symulacje przeprowadzone dla tego przypadku pokazują dużą zgodność rezultatów z przewidywaniami. W symulacji otrzymaliśmy $\hat{v}_{max} = 51,8341\ m/s$ i $\hat{t}_{max} = 0,5401\ s$. Zastosowanie praw skalowania do spadku łańcucha pokazuje, że w tej symulacji, koniec łańcucha osiągnie prędkość dźwięku dla łańcucha o długości $L \approx 86\ m$.

Związek spadku liny (łańcucha) ze strzałem z bicza jest prosty. Możemy sobie wyobrazić

spadek liny w układzie, w którym punkt zaczepienia liny porusza się z przyspieszeniem $g$ skierowanym w przeciwnym kierunku do siły grawitacji. Mówiąc inaczej, będziemy ciągnąć początek łańcucha ze stałym przyspieszeniem $g$ w przestrzeni bez pola grawitacyjnego. Działa tutaj zasada równoważności Einsteina. Efekt ten ujawniają też równania różniczkowe (2.5.2), w których widzimy, że człony związane z grawitacją i ruchem punktu wsparcia mają taką samą postać. Podobne analogie opisane zostały w pracy [79].

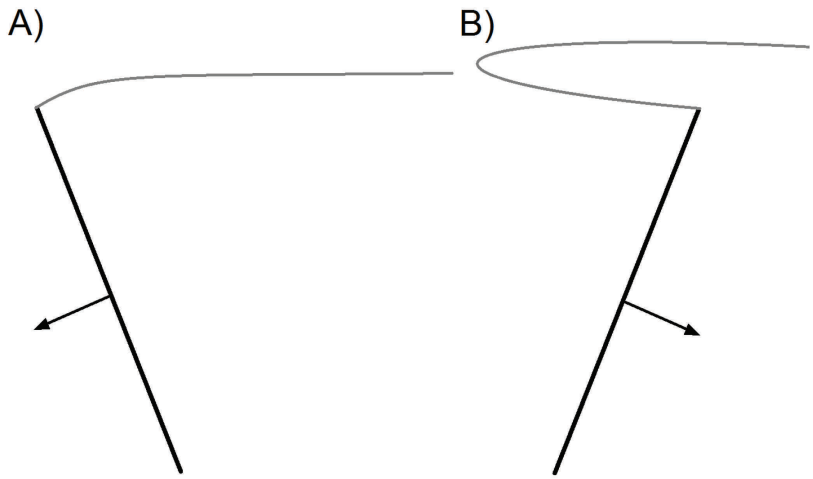
W przypadku bicza, nadanie stałego przyspieszenia rękojeści bicza (w punkcie $O$) odpowiadać będzie spadkowi łańcucha w polu grawitacyjnym. Zatem wprowadzenie ruchu rękojeści umożliwi uzyskanie większych prędkości wynikających z praw dynamiki, ponadto zwiększenie długości rzemienia będzie miało również wpływ na osiągnięcie większych prędkości końca bicza. Zasada ta została naturalnie wprowadzona w życie. W dalszej części opiszemy najprostsze techniki strzału z bicza i odpowiadające im warunki początkowe.

## 7.3. Strzał z bicza prostego

### 7.3.1. Budowa bicza i techniki strzału

W tej części opiszemy budowę najprostszego bicza, który w polskiej tradycji nazywany jest batem. Bicz prosty stanowić będzie rzemień zbudowany z wąskiego pasa skóry, zamocowany do długiego sztywnego trzonka. Budowa takiego bicza może być zatem bardzo dobrze przybliżona przez równania opisujące połączone pręty. W przypadku symulacji realnego rzemienia, w równaniach ruchu uwzględnić należy sprężystość rzemienia a także wewnętrzne tłumienie. Problem dynamiki bicza rozumieć będziemy jako problem ruchu liny, której jeden z końców pozostaje swobodny, a drugi porusza się z sposób określony przez eksperymentatora. Najprostszą techniką strzelania z bicza prostego jest ruch rękojeścią wstecz, po którym następuje, wykonana w odpowiednim momencie, zmiana kierunku ruchu i jego silne przyspieszenie. Załóżmy, że po pierwszej fazie ruchu uzyskujemy stan, w którym wyprostowany rzemień porusza się ruchem jednostajnym. Przyjmijmy teraz, że po niewielkim przesunięciu w dół rękojeści wprawimy ją w jednostajnie przyspieszony ruch w kierunku przeciwnym.

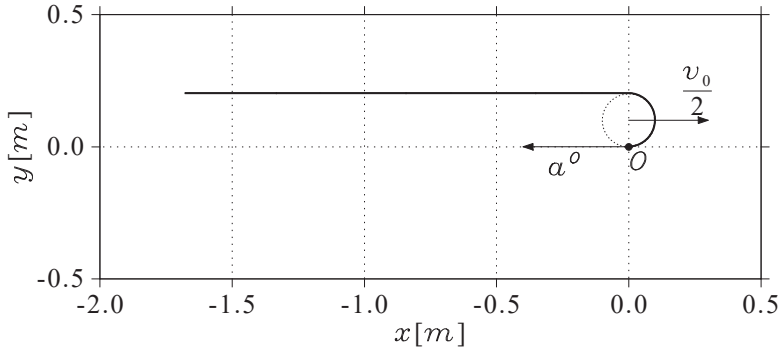
Schemat tej techniki przedstawia rysunek 7.4.




**Rysunek 7.4:** Technika strzału z bicza prostego. A) W pierwszym etapie ruch rękojeści wyprostowuje rzemień i nadaje mu prędkość początkową. B) W drugim etapie następuje gwałtowny ruch rękojeścią w kierunku przeciwnym do kierunku lotu rzemienia.

### 7.3.2. Warunki początkowe dla wybranej techniki strzału z bicza

Odpowiadające tej sytuacji warunki początkowe ruchu opisać możemy następująco. Wyprostowany rzemień poruszający się ruchem jednostajnym z prędkością $v_0$ zostaje owinięty wokół bloczka o promieniu $R$, poruszającego się z prędkością $v_0/2$ a jego początek zostaje zamocowany do rękojeści w punkcie $O$. Symulację rozpoczynamy więc od momentu, w którym ruchomy bloczek zostaje usunięty a rękojeść, do której przymocowano początek rzemienia, rozpoczyna ruch jednostajnie przyspieszony w kierunku przeciwnym do kierunku ruch rzemienia z przyspieszeniem równym $a^O$. Sytuacja ta przedstawiona została na rysunku 7.5.



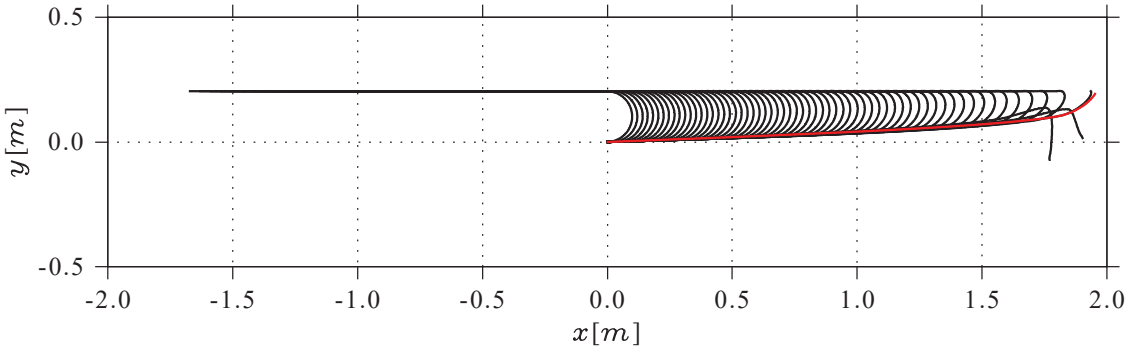

**Rysunek 7.5:** Warunki początkowe ruchu bicza prostego. Na rysunku przedstawiono sens fizyczny warunków początkowych użytych w symulacjach numerycznych. Wyprostowany rzemień poruszający się ruchem jednostajnym z prędkością $v_0$ zostaje owinięty wokół bloczka o promieniu $R$ poruszającego się z prędkością $v_0/2$ i zamocowany do rękojeści w punkcie $O$. W chwili początkowej rękojeść zaczyna poruszać się w przeciwnym kierunku do ruchu rzemienia z przyspieszeniem $a^O$.

## 7.3.3. Symulacje strzału z bicza

### Przypadek $a^O = 0$

W symulacji przyjmiemy realistyczne wartości opisujące ruch bicza. Długość rzemienia wynosić będzie $L = 2\ m$, jego prędkość początkowa $v_0 = 10\ m/s^2$, a przyspieszenie rękojeści $a^O = 200\ m/s^2$. Możemy również przyjąć, że ruch odbywać się będzie bez udziału pola grawitacyjnego. Założenie to nie ma praktycznie wpływu na przebieg symulacji ze względu na krótki czas symulacji. Zostało to potwierdzone w eksperymentach numerycznych. Jako parametr dyskretyzacji przyjmiemy $n = 400$. Zanim przedstawimy wyniki symulacji odwzorowującej przypadek rzeczywisty, przyjrzymy się jaki wpływ na dynamikę bicza mają poszczególne parametry modelu. Na początku wykonaliśmy podobny eksperyment jak w paragrafie 7.2.1 dla przypadku prostego bicza ($L = 2\ m$, $M = 0,1\ kg$, $v_0 = 10\ m/s$, $n = 400$, $a^O = 0$, $g = 0$, $r = 0$, $k = 0$), z początkowym kształtem rzemienia takim jak na rysunku 7.5 z $R = 0,1\ m$. Na rysunku 7.6 prezentujemy kształt bicza w kolejnych fazach lotu.

Obliczenia pokazały, że w tym przypadku maksymalna prędkość końca rzemienia wynosi $v_{max} = 204,6929\ m/s$ i osiągnięta została w chwili $t_{max} = 0,2403\ s$. Prędkość maksymalna



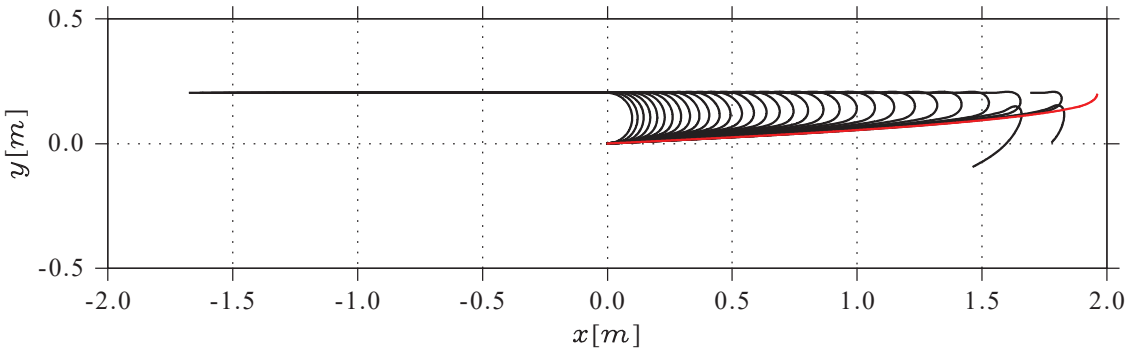

**Rysunek 7.6:** Symulacja ruchu rzemienia idealnego z zadaną prędkością początkową $v_0 = 10\ m/s$. W symulacji przyjęliśmy początkowy kształt rzemienia taki jak na rysunku 7.5 ($R = 0,1\ m$), przy czym rękojeść przez cały czas pozostaje nieruchoma. W obliczeniach przyjęto, że długość rzemienia wynosi $L = 2\ m$, masa $M = 0,1\ kg$, parametr dyskretyzacji $n = 400$. Segmenty połączone są złączami bez sprężystości ($k = 0$) i dyssypacji ($r = 0$). Fazy ruchu rzemienia pokazano w odstępach $0,002\ s$. Kształt rzemienia, dla którego osiągnięto maksymalną prędkość zaznaczono z kolorze czerwonym.

uzyskana w tej symulacji jest zbliżona do tej w symulacji wzorcowej 7.2.1, jednak czas jej osiągnięcia skrócił się nieznacznie w porównania do czasu $t_{max} = 0,2666\ s$, przewidywanego zgodnie ze wzorem (7.5). Wynika to z przyjętego kształtu początkowego bicza. Cześć lecąca jest krótsza i czas lotu jest też krótszy. Widzimy zatem, że przy tak przyjętych warunkach początkowych wyniki symulacji są dobrze przybliżone przez rozwiązanie analityczne. Prędkość maksymalna osiągnięta w tej symulacji, zgodnie z przewidywaniami, nie przekroczyła prędkości dźwięku. Mamy dodatkowo wyniki, które będziemy mogli porównać z symulacjami odpowiadającymi rzeczywistej technice strzału z bicza.

### Przypadek $a^O > 0$

Wykonamy symulację podobną do tej omawianej powyżej z tym, że uwzględnimy ruch rękojeści w kierunku przeciwnym do początkowego kierunku lotu rzemienia. Przyjmujemy, że

w chwili początkowej punkt zaczepienie $O$ zaczyna poruszać się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a^O = 200\ m/s^2$. Kolejne fazy ruchu rzemienia przedstawione zostały na rysunku 7.7.



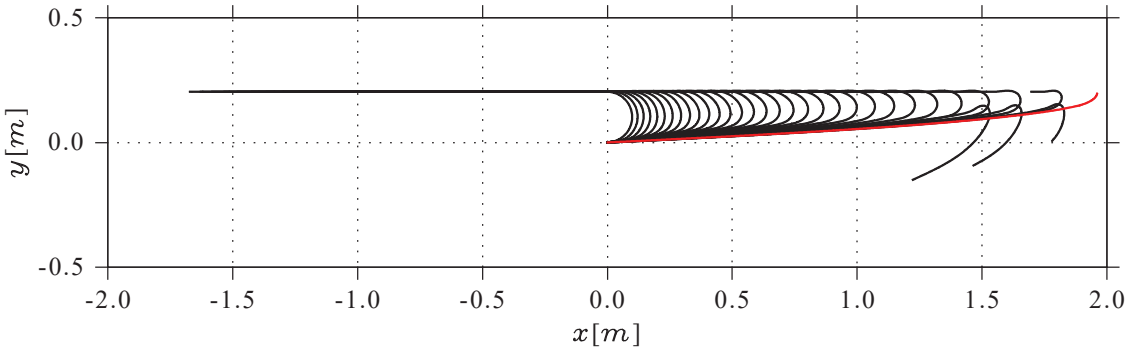

**Rysunek 7.7:** Symulacja ruchu rzemienia idealnego z ruchomą rękojeścią. W symulacji zastosowano warunki początkowe przedstawione na rysunku 7.5 z $R = 0,1\ m$. Bicz porusza się początkowo z prędkością $v_0 = 10\ m/s$ a punkt zaczepienia bicza porusza się w kierunku przeciwnym z przyspieszeniem $a^O = 200\ m/s^2$. W obliczeniach przyjęto, że długość rzemienia wynosi $L = 2\ m$, masa $M = 0,1\ kg$, parametr dyskretyzacji $n = 400$. Segmenty połączone są złączami bez sprężystości ($k = 0$) i dyssypacji ($r = 0$). Fazy ruchu rzemienia pokazano w odstępach $0,002\ s$. Kształt rzemienia, dla którego osiągnięto maksymalną prędkość zaznaczono z kolorze czerwonym.

Dodanie do symulacji ruchu rękojeści spowodowało, że prędkość osiągnięta przez koniec rzemienia przekroczyła prędkość dźwięku. Wyniosła ona $v_{max} = 564,8388\ m/s$ i została osiągnięta w czasie równym $t_{max} = 0,11791\ s$. Warto również zwrócić tu uwagę, że maksymalne przyspieszenie, które w tej symulacji osiągnął koniec rzemienia sięgnęło $1,3 \times 10^7\ m/s^2$. Tak wielkie przyspieszenie wydaje się nierealne i wymaga weryfikacji.

### Przypadek $a^O > 0$, $k > 0$, $r > 0$

W kolejnym eksperymencie uwzględnione zostały parametry fizyczne rzemienia, którym odpowiadają sprężystość i tłumienie wewnętrzne występujące między złączami segmentów w

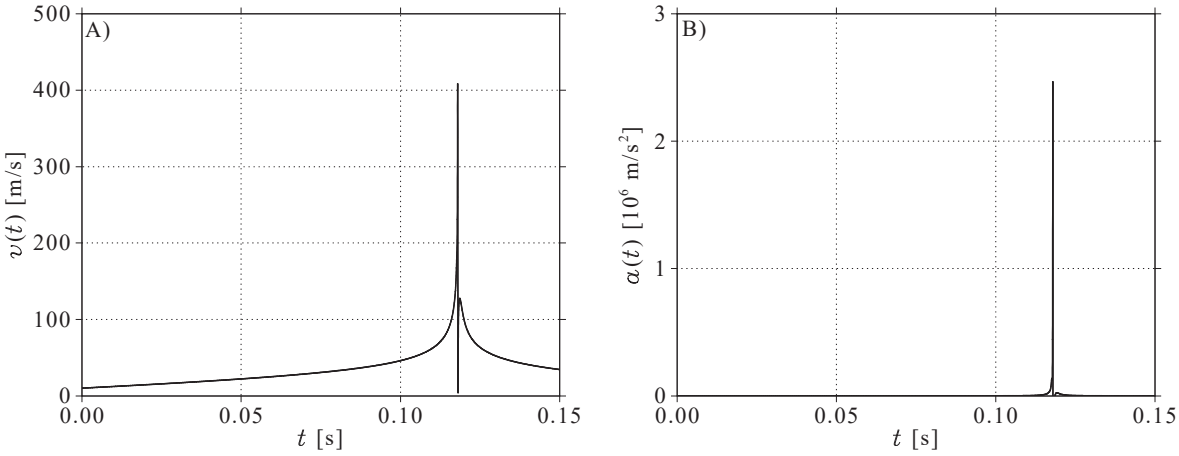
modelu liny. Dla rzeczywistego rzemienia, wartości parametrów sprężystości i tłumienia dobraliśmy na podstawie symulacji spadku liny. Wykonaliśmy szereg eksperymentów spadku różnych lin oraz odpowiadających im symulacji i na tej podstawie dobraliśmy wartości parametrów sprężystości i tłumienia. Dla rzeczywistej liny, wartości tych parametrów ustaliliśmy na $k = 10^{-1}\ Nm$ a tłumienia $r = 10^{-4}\ Nms$. Celem tego eksperymentu jest dobór bardziej realistycznych parametrów i sprawdzenie, jak zmienią się wyniki po wprowadzenie do równań członów opisujących właściwości rzemienia. Rezultaty tej symulacji przedstawia rysunek 7.8.




**Rysunek 7.8:** Symulacja ruchu rzemienia rzeczywistego z ruchomą rękojeścią i uwzględnieniem właściwości fizycznych rzemienia. W symulacji zastosowano warunki początkowe przedstawione na rysunku 7.5 z $R = 0,1\ m$. Bicz porusza się początkowo z prędkością $v_0 = 10\ m/s$ a punkt zaczepienia $O$ porusza się w kierunku przeciwnym z przyspieszeniem $a^O = 200\ m/s^2$. W obliczeniach przyjęto, że długość rzemienia wynosi $L = 2\ m$, masa $M = 0,1\ kg$, parametr dyskretyzacji $n = 400$. Segmenty połączone są złączami sprężysto–tłumionymi z $k = 10^{-1}\ Nm$ i $r = 10^{-4}\ Nms$. Fazy ruchu rzemienia pokazano w odstępach $0,002\ s$ w układzie, w którym punkt zaczepienia rzemienia jest nieruchomy. Kształt rzemienia, dla którego osiągnięto maksymalną prędkość, zaznaczono w kolorze czerwonym.

Kształty bicza w poszczególnych chwilach, w obu symulacjach są bardzo zbliżone. Pomimo tego, maksymalna prędkość w symulacji uwzględniającej sprężystość i tłumienie złącz okazała się znacznie mniejsza niż dla przypadku idealnie wiotkiego rzemienia. Maksymalna prędkość w tej symulacji wyniosła $v_{max} = 408,4824\ m/s$ i została osiągnięta w chwili

$t_{max} = 0,11796\ s$. Uwzględnienie sprężystości i tłumienia miedzy segmentami spowodowało zredukowanie prędkości bicza o 30%, a przy tym czas osiągnięcia maksimum prawie się nie zmienił. Maksymalna wartość przyspieszenia również uległa zmniejszeniu w porównaniu do poprzedniej symulacji i wyniosła $a_{max} = 2,5 \times 10^6\ m/s^2$. Wykresy prędkości i przyspieszenia dla tej symulacji przedstawia rysunek 7.9.




**Rysunek 7.9:** Prędkość A) i przyspieszenie B) końca bicza prostego. Bicz początkowo porusza się z prędkością $v_0 = 10\ m/s$ a punkt zaczepienia $O$ przyspieszony jest w kierunku przeciwnym z przyspieszeniem $a^O = 200\ m/s^2$. W obliczeniach przyjęto, że długość rzemienia wynosi $L = 2\ m$, masa $M = 0,1\ kg$, parametr dyskretyzacji $n = 400$. Segmenty połączone są złączami sprężysto-tłumionymi z $k = 10^{-1}\ Nm$ i $r = 10^{-4}\ Nms$.

Z rysunku 7.9 wynika, iż przyspieszenie osiąga wartości rzędu $2,5 \times 10^5 g$. Jak wykazały doświadczenia, przyspieszenie końca bicza osiąga wartości rzędu $5 \times 10^4 g$. Wyniki otrzymane w eksperymencie numerycznym, nawet z uwzględnieniem sprężystości i tłumienia, są nierealne. Wyjaśnić to można analizując, co dzieje się w realnym doświadczeniu. Tak wielkie wartości przyspieszenia są wynikiem niefizycznego założenia, że segmenty, z których zbudowany jest rzemień, są nierozciągliwe. W realnych warunkach pojawienie się związanych z tymi przyspieszeniami sił bezwładności powoduje chwilowe wydłużenie rzemienia, wydłużenie czasu trwania lotu i w efekcie redukcję wartości przyspieszenia. Rozciągliwość rzemienia

powinna zredukować wartość maksymalnego przyspieszenia rozciągając w czasie moment, w którym on występuje. Dodatkowo zauważyć można, że prędkość maksymalna powinna być bliska tej, którą obserwujemy w przypadku rzemienia nierozciągliwego.

## 7.4. Strzał z bicza australijskiego

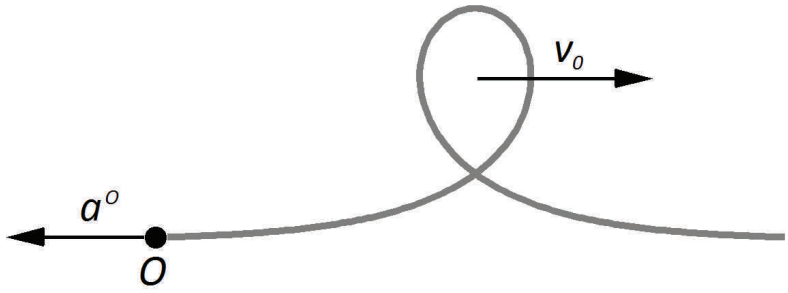
Nawiązując do prac Goriely'ego i McMillen'a, wykonamy obliczenia dla techniki strzału z bicza opisywanej w pracach [1, 17] i porównany uzyskane wyniki z wynikami otrzymanymi dla bicza prostego. Prace wspomnianych autorów bardzo dokładnie opisują technikę strzału z bicza australijskiego oraz odpowiadające jej warunki początkowe. Nie będziemy zatem powtarzać całego toku rozumowania przeprowadzonego w tych pracach i zaprezentujemy jedynie najważniejsze punkty, istotne dla symulacji przeprowadzonych w dalszej części tego rozdziału. Zaczniemy od opisu bicza australijskiego i metod strzelania z tego rodzaju bicza.

### 7.4.1. Budowa bicza australijskiego

Bicz australijski jest znacznie bardziej złożony od bicza prostego. Najistotniejszą jego częścią jest jego ruchoma część, którą dla prostoty nazywać będziemy rzemieniem. Rzemień bicza australijskiego, składa się z trzech części o malejącej średnicy. Pierwsza, najgrubsza część (*thong*) jest plecionką o przekroju kołowym wykonaną z kawałków skóry kangura o kształcie trójkąta. Kolejna część (*fall*) wykonana jest z pojedynczego rzemienia. Ostatnia część, najcieńsza i najlżejsza (*popper*), to kawałek plastikowego sznurka. Malejąca średnica powoduje zmniejszanie się liniowej gęstości, co w analizie przeprowadzonej przez Goriely'ego i McMillen'a [17] ma istotne znaczenie. Do matematycznego opisu takiego bicza autorzy zastosowali model sprężystego pręta o malejącym przekroju. Model ten opracowany został na podstawie pracy [20].

W analizowanej przez wspomnianych autorów technice strzału, strzelający z bicza, początkowo wytwarza na nim pętlę poruszającą się w kierunku swobodnego końca bicza. W odpowiedniej chwili gwałtowny ruch rękojeści w kierunku przeciwnym, zaciska pętlę i nadaje

jej dodatkowego przyspieszenia. Schemat tej techniki strzału z bicza opisuje rysunek 7.10. Do




**Rysunek 7.10:** Technika strzału z bicza australijskiego. Strzelający z bicza formuje pętlę poruszającą się z prędkością $v_0$ w kierunku swobodnego końca a następnie ciągnie za rękojeść nadając pętli dodatkowego przyspieszenia $a^O$.

opisu warunków początkowych ruchu pętli zastosować można równaniu występujące w teorii fal solitonowych. Stan przedstawiający początkowy ruch rzemienia może być rozwiązaniem równania opisującego zaburzenie (pętlę) poruszającą się w nieskończonym pręcie sprężystym. Równanie to, prowadzi do równania opisującego wahadło matematyczne, którego rozwiązanie jest powszechnie znane. Poniżej podajemy postać rozwiązania zbliżoną do podanej w pracy [17]:

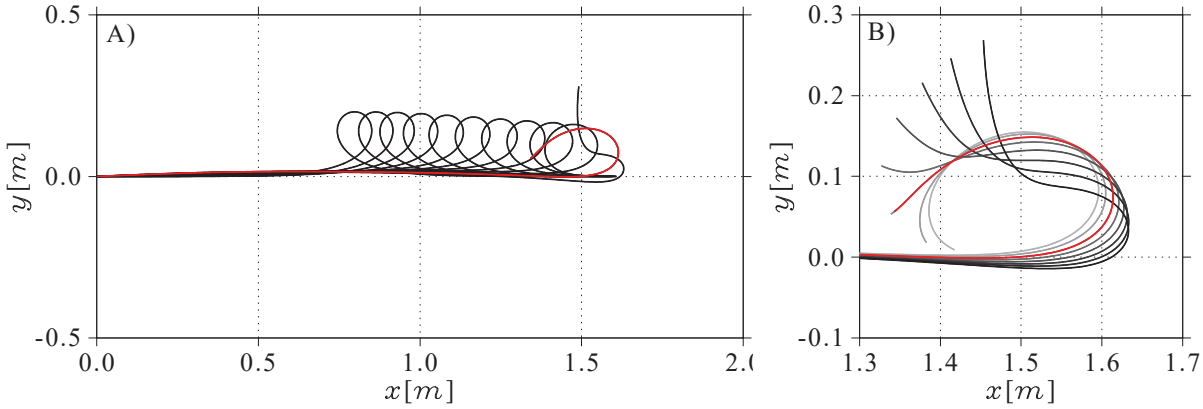
$$\varphi(s,t) = 4 \operatorname{arc\,tg}\left(e^{\frac{s-v_0 t}{\gamma}}\right). \tag{7.7}$$

Funkcja $\varphi(s,t)$ jest funkcją długości krzywej $s$ i czasu $t$. Określa ona kąt nachylenia stycznej do krzywej opisującej kształt bicza w punkcie $s$ do osi $x$. Prędkość rozchodzenia się fali określona jest przez parametr $v_0$ a parametr $\gamma$ wpływa na wysokość fali (pętli). Przy tych założeniach, wysokość pętli wynosić będzie $2\gamma$.

### 7.4.2. Symulacje komputerowe

W naszych symulacjach użyjemy tego samego modelu, co w przypadku bicza prostego, i porównamy wyniki dla obu technik. Podobnie jak w przypadku bicza prostego, w naszych doświadczeniach numerycznych przyjęliśmy, że długość rzemienia wynosi $L = 2\ m$, parametr

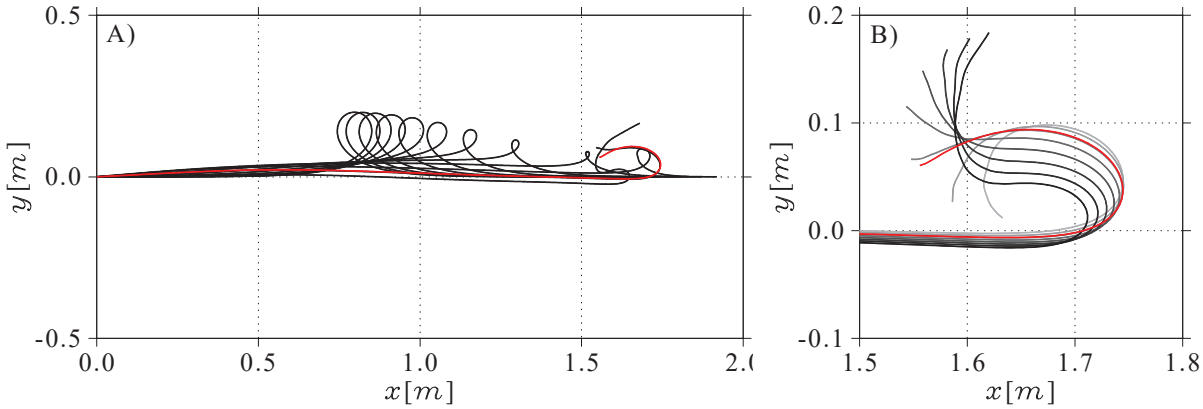
dyskretyzacji $n = 400$, początkowa wysokość pętli równa jest $0,2\ m$, a jej początkowa prędkość wynosi $v_0 = 10\ m/s$. W tym doświadczeniu założyliśmy, że rzemień jest idealnie wiotki: $k = 0$ i $r = 0$. Pierwsze doświadczenie wykonaliśmy dla $a^O = 200\ m/s^2$, takiego samego jak dla bicza prostego. Fazy lotu bicza uzyskane w tej symulacji przedstawia rysunek 7.11.




**Rysunek 7.11:** Symulacja ruchu bicza australijskiego o długości $L = 2\ m$, z warunkami początkowymi $v_0 = 10\ m/s$, $\gamma = L/20$ i $a^O = 200\ m/s^2$. Rysunek A) przedstawia kolejne fazy ruchu w odstępach $\Delta t = 0,003\ s$, w układzie, w którym punkt zaczepienia rzemienia jest nieruchomy. Rysunek B) pokazuje szczegóły ruchu końca bicza w ostatniej fazie lotu z $\Delta t = 0,001\ s$. Kształt rzemienia, dla którego osiągnięto maksymalną prędkość, zaznaczono w kolorze czerwonym.

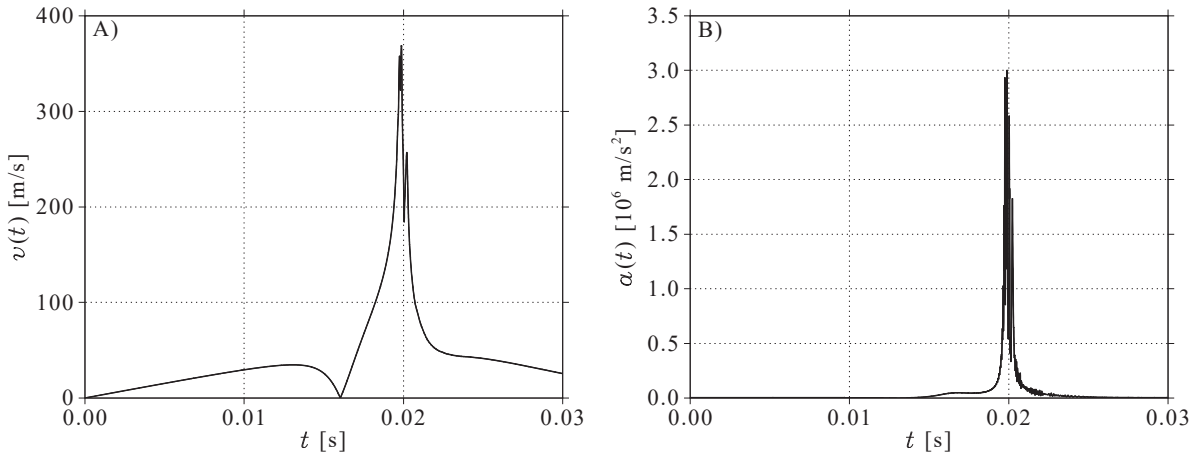
Wynik doświadczenia pokazał, że prędkość maksymalna końca takiego bicza jest znacznie mniejsza od tej uzyskanej dla bicza prostego. Wynosiła ona $77,581\ m/s$ i uzyskana została w czasie $0,0601\ s$. Również przyspieszenie końca w tym przypadku było znacznie mniejsze i wynosiło $8,19 \times 10^4\ m/s^2$. Dalsze eksperymenty pokazały, że wzrost prędkości początkowej pętli nie wpływa znacząco na wzrost prędkości maksymalnej końca, gdyż pętla rozwinie się całkowicie zanim zostanie przyspieszona. Wzrost prędkości końca bicza uzyskać można przez wzrost przyspieszenia rękojeści $a^O$. Jeżeli jednak przyspieszenie będzie zbyt duże, pętla zaciśnie się zbyt szybko, powodując całkowite rozprostowanie rzemienia i nie dojdzie do strzału. W celu uniknięcia tego efektu, wymagane jest wprowadzenie sprężystości do modelu. Technika strzału z bicza australijskiego wymaga więc dobrania odpowiedniej prędkości początkowej

pętli i przyspieszenia tak, aby pętla nie zacisnęła się zbyt mocno i cały czas poruszała się w kierunku końca bicza jednocześnie przyspieszając. Wykonaliśmy wiele eksperymentów i na ich podstawie dobraliśmy parametry, dla których koniec bicza pokona prędkość dźwięku. Uzyskaliśmy to dla rzemienia o sprężystości $k = 10^{-1}\ Nm$, dla którego początkowa prędkość pętli wynosiła $v_0 = 1\ m/s$ a przyspieszenia rękojeści $a^O = 3200\ m/s$. Na rysunku 7.12 pokazane zostały kolejne fazy ruchu takiego bicza.



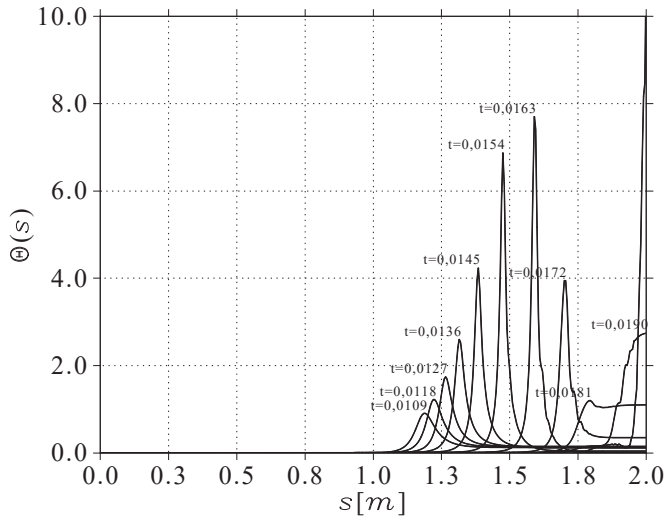

**Rysunek 7.12:** Symulacja ruchu bicza australijskiego o długości $L = 2\ m$, sprężystości $k = 10^{-1}\ Nm$, z warunkami początkowymi $v_0 = 1\ m/s$, $\gamma = L/20$ i $a^O = 3200\ m/s^2$. Rysunek A) przedstawia kolejne fazy ruchu w odstępach $\Delta t = 0,001\ s$, w układzie, w którym punkt zaczepienia rzemienia jest nieruchomy. Rysunek B) pokazuje szczegóły ruchu końca bicza w ostatniej fazie lotu z $\Delta t = 0,0002\ s$. Kształt rzemienia, dla którego osiągnięto maksymalną prędkość zaznaczono z kolorze czerwonym.

W symulacji przedstawionej na rysunku 7.12 maksymalna prędkość wyniosła $v_{max} = 368,884\ m/s$ i osiągnięta została w czasie $t = 0,01987\ s$. W chwili tej maksymalne przyspieszenie wyniosło $a_{max} = 3 \times 10^6\ m/s^2$. Rysunek 7.13 przedstawia wykresy prędkości i przyspieszenia uzyskane podczas tej symulacji. Widzimy, że w tej symulacji otrzymaliśmy podobne rezultaty do wyników otrzymanych dla bicza prostego. Po tych eksperymentach można stwierdzić, że technika strzału z bicza australijskiego jest znacznie bardziej wymagająca. Zasada działania tej techniki jest różna od tej dla bicza prostego. Na rysunku 7.12




**Rysunek 7.13:** Prędkość A) i przyspieszenie B) końca bicza australijskiego. Pętla o wysokości $0,2\ m$ początkowo poruszała się z prędkością $v_0 = 1\ m/s$ a punkt zaczepienia bicza poruszał się z przyspieszeniem $a^O = 3200\ m/s^2$. W obliczeniach przyjęto, że długość rzemienia wynosi $L = 2\ m$, masa $M = 0,1\ kg$, parametr dyskretyzacji $n = 400$. Segmenty połączone są złączami o sprężystości $k = 10^{-1}\ Nm$.

obserwujemy, że przyspieszenie rękojeści bicza $O$ powoduje, że pętla staje się coraz mniejsza i porusza się coraz szybciej. Całkowita energia kinetyczna tego układu skupia się w coraz krótszej pętli, która wraz z czasem przesuwa się w kierunku końca rzemienia. W ostatniej fazie pętla rozwija się i tam zlokalizowana jest cała energia. Możemy to zobrazować przy pomocy funkcji $\Theta(s)$ zdefiniowanej we wzorze (7.3). Rozkład gęstość energii w kolejnych chwilach dla tego typu bicza przedstawia rysunek 7.14. Z rysunku 7.14 wynika, że do pewnego momentu energia zlokalizowana jest w pętli i w ostatniej fazie lotu energia zostaje skupiona w końcu rzemienia, który zaczyna się rozwijać. W tym momencie rozkład energii przypomina rozkład energii dla bicza prostego, pokazanego na wykresie 7.3. W modelu bicza, który tu zastosowaliśmy, nie uwzględniono malejącego przekroju rzemienia, który jest istotny w tej technice strzału z bicza. Przesuwanie się pętli w kierunku końca o coraz mniejszym przekroju i masie spowoduje dodatkowy wzrost prędkości ze względu na malejącą masę. Wynika z tego, że w rzeczywistości, uzyskać można znacznie większe prędkości końca bicza i przyspieszenie




**Rysunek 7.14:** Gęstość energii kinetycznej bicza australijskiego w kolejnych fazach jego ruchu. Rysunek pokazuje, że w kolejnych chwilach energia lokalizuje się w coraz krótszym fragmencie bicza i przesuwa się w kierunku końca. Obliczenia przeprowadzono dla rzemienia o długości $L = 2\ m$, masie $M = 0,1\ kg$, pętli o wysokości $0,2\ m$, prędkości początkowej pętli $v_0 = 1\ m/s$ i przyspieszeniu rękojeści $a^O = 3200\ m/s^2$.

rękojeści nie musi być aż tak duże jak wynika z symulacji.

## 7.5. Podsumowanie

W tej części przedstawiliśmy teoretyczne podstawy problemu strzału z bicza. W modelu analitycznym opracowanym dla bicza prostego widzimy, że osiąganie dużych prędkości przy strzale z bicza jest możliwe. Dodatkowo przeprowadziliśmy eksperyment numeryczny z wykorzystaniem modelu dyskretnego, w którym uzyskaliśmy dużą zgodność z wynikami przewidywanymi w modelu analitycznym. Następnie przeprowadziliśmy szereg symulacji, z różnymi parametrami i warunkami początkowymi odpowiadającymi realnym warunkom i pokazaliśmy, że koniec bicza przekroczył prędkość dźwięku. Wykonaliśmy również szereg symulacji z warunkami początkowymi podobnymi do tych, które opisali w swych pracach Goriely i

McMillen [1, 17]. Wyniki, które otrzymaliśmy również potwierdziły przekroczenie prędkości dźwięku przez koniec bicza prostego przy zastosowaniu techniki strzału z bicza australijskiego. W doświadczeniach numerycznych wyniki wskazują na istnienie olbrzymich przyspieszeń, rzędu $10^6\ m/s^2$, które z pewnością nie są realne. Wynikają one z założenia w modelu dyskretnym, że bicz składa się z nierozciągliwych elementów. W rzeczywistości rzemień rozciąga się nieznacznie pod wpływem sił bezwładności, przedłużając czas całkowitego wyprostowania się, co wpływa na zmniejszenie się przyspieszenia.

# Rozdział 8
# Zakończenie

Niniejsze opracowanie jest autorskim wstępem do szerokiego, interdyscyplinarnego tematu dynamiki lin i łańcuchów. W szczególności przeprowadzona została w nim pogłębiona analiza możliwych modeli lin i łańcuchów, sformułowano równania ruchu i omówiono własności algorytmów całkowania numerycznego. Niewątpliwie spektakularny efekt strzału z bicza, opisany w rozdziale 7, jest jednym z najbardziej rozpoznawalnych i wciąż badanych efektów dynamiki lin i łańcuchów. Pokazuje on też dobitnie jak ważny jest wybór odpowiedniego modelu liny oraz algorytmu całkowania jej równań ruchu.

W przedstawionej analizie zaproponowane zostały dwa modele matematyczne liny. Pierwszy z nich to model połączonych prętów, który okazał się bardzo realistycznym modelem i w związku z tym był wykorzystywany dalej w naszych badaniach. Drugi model, znacznie prostszy, stanowił układ połączonych wahadeł. Dla tego modelu podano postać równań ruchu umożliwiającą znacznie bardziej efektywne obliczenia numeryczne. Dla obu modeli wykonano szczegółową analizę dokładności i efektywności obliczeń. W rezultacie wybrano dwa algorytmy, które stosowano podczas dalszych obliczeń. Wspomniane wyżej modele i algorytmy opisano szczegółowo w rozdziałach 2 i 3.

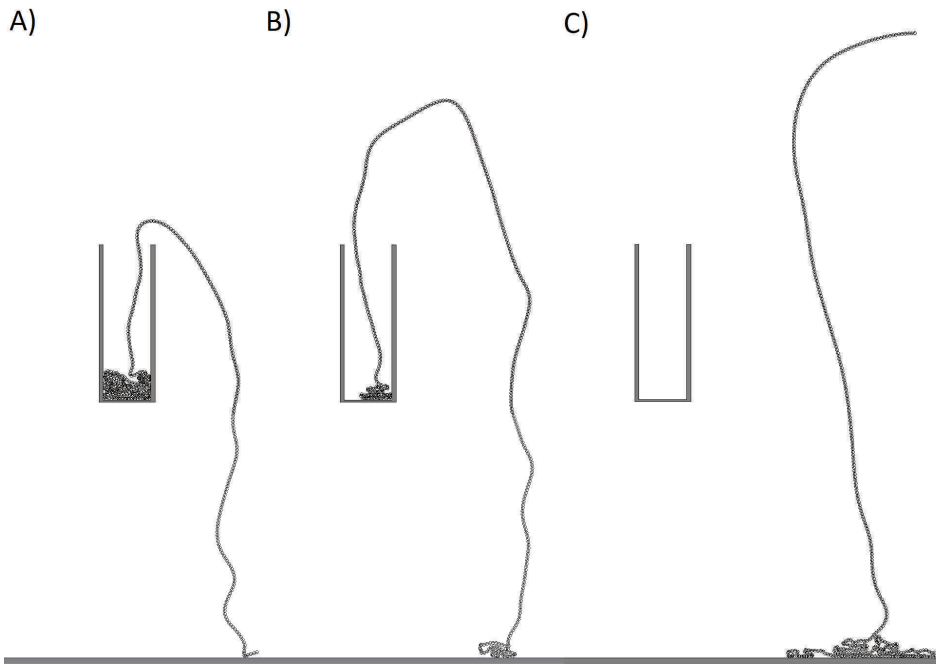
Spadek łańcucha to jeden z generycznych problemów dynamiki lin i łańcuchów. Z uwagi na swoje znaczenie był on przedmiotem analiz wielu autorów [70, 12, 13, 14]. Mimo to problem ten wciąż pozostaje nie w pełni rozwiązany. Symulacje i doświadczenia opisane w rozdziale 4 wskazały na pewne braki w dotychczasowym rozumieniu tego problemu. Doświadczenia ze spadającym łańcuchem były także realizowane we współpracy z J.-C. Géminardem z Ecole

Normale Sup´eriere w Lyonie, który zarejestrował kolejne fazy spadku łańcucha dla różnych wartości odległości pomiędzy jego początkowo nieruchomymi końcami. Wyniki doświadczeń i symulacji numerycznych, analizę prędkości i przyspieszenia końca łańcucha, opublikowano w American Journal of Physics [73]. W niniejszym opracowaniu są one opisane szczegółowo w rozdziale 5.

Kolejnym rozważanym zagadnieniem była odpowiedź na pytanie jaką siłę spadający łańcuch wywiera na punkt, w którym pozostaje zaczepiony. Wiąże się to z praktycznymi pytaniami o wytrzymałość zarówno konstrukcji mocującej jak i samego łańcucha. Punktem wyjścia dla rozważań zaprezentowanych w rozdziale 6 były wyniki doświadczeń przeprowadzonych przez J.-C. Géminarda [15]. Za pomocą symulacji, z dużą dokładnością, wyznaczone zostały wszystkie parametry, które były rejestrowane w doświadczeniach wykonanych przez Géminarda. Uzyskano bardzo szczegółowe wyniki dotyczące sił, również dla niezmiernie trudnego doświadczalnie przypadku, gdy łańcuch początkowo jest bliski całkowitemu rozciągnięciu.

Ostatnim rozważanym problemem był efekt strzału z bicza australijskiego opisanego przez A. Goriely'ego [1, 17]. Wykonane symulację opisano w części 7. Przedstawiono w niej teoretyczne podstawy problemu strzału z bicza oraz przedyskutowano wyniki symulacji pokazując, że koniec bicza przekracza prędkość dźwięku.

Przedstawione w opracowaniu ujęcie problemu dynamiki lin i łańcuchów oraz część uzyskanych wyników zostały opublikowane [49, 71, 73, 77] i są wykorzystywane w badaniach różnych zjawisk. Przykładem mogą być prace [50, 51, 48, 52, 34], w których autorzy wykorzystali opisane tu modele i dokonali określonych rozszerzeń. W pracach tych znaleźć można również szczegółową analizę zjawisk chaotycznych, w przypadku, gdy lina początkowo zaczepiona jest do ruchomego oscylującego punktu. Wyniki symulacji zostały użyte również w wielu pracach teoretycznych związanych z paradoksami występującymi w szeroko pojętej dynamice lin i łańcuchów: [68, 74, 80, 79, 81, 82, 75, 72, 34, 83, 84]. Zwięzłą analizę tych zagadnień znaleźć można w pracy [11]. Przedstawione wyniki mogą znaleźć również zastosowanie w badaniach technicznych. Przykładem mogą być prace dotyczące rozciągliwej krzywej łańcuchowej [85], dynamiki układów mechanicznych [86], spadku płynu w pionowej rurze [87], dynamiki lin w




**Rysunek 8.1:** Symulacja efektu "fontanny łańcuchowej". Na rysunkach A), B) i C) przedstawione zostały kolejne fazy spadku łańcucha i unoszenia się czoła od momentu styku łańcucha z podstawą, osiągnięcie maksymalnej wysokości czoła łańcucha do całkowitego opróżnienia pojemnika z łańcuchem. W symulacji zastosowano łańcuch z czterystoma ogniwami o średnicy 6 $mm$.

wodzie [88, 89, 90], czy też zagadnienia związane z lotnictwem [76, 91] i systemami satelitarnymi [92, 93, 94, 95].

Niniejsza monografia obejmuje szereg istotnych zagadnień dotyczących dynamiki lin jednak jesteśmy świadomi, że materiał w niej zawarty stanowi zaledwie wytęp do tej rozległej tematyki. Dziedzina jest wciąż rozwijana i pojawiają się nowe problemy do rozwiązania. Warto tu wspomnieć opublikowane niedawno prace dotyczące problemu ruchu liny na bloczku [96] czy też szeroko dyskutowanego w literaturze zagadnienia *efektu Moulda* [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Efekt Moulda jest fascynujący przez jego sprzeczność z intuicją. Przyczyny formowania tego, co nazywane jest dziś „fontanną łańcuchową", są skomplikowane i wciąż są przedmiotem badań. Poniżej na rysunku 8.1 przedstawiamy przykładowe wyniki pokazujące ten efekt uzyskany w naszej symulacji.

# Bibliografia


[1] T. McMillen and A. Goriely, "Shape of a Cracking Whip," *Phys. Rev. Lett*, **88** (2002) 24.

[2] J. S. Biggins, "Growth and shape of a chain fountain," *EPL (Europhysics Letters)*, **106** (2014) 4.

[3] J. S. Biggins and M. Warner, "Understanding the chain fountain," *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **470** (2014) 2163.

[4] Y. Andrew, F. Kearns, T. Mustafa, R. Salih, A. Loratim-Uba, I. Udall, and M. Usama, "Non-linear dependence of the height of a chain fountain on drop height," *Physics Education*, **50** (2015) 564.

[5] J. Pantaleone, "A quantitative analysis of the chain fountain," *American Journal of Physics*, **85** (2017) 414.

[6] N. S. Gyul'amirova and E. I. Kugushev, "Stationary shape of a moving heavy flexible thread," *Moscow University Mechanics Bulletin*, **73** (2018) 7.

[7] E. Flekkoy, M. Moura, and K. Maloy, "Mechanisms of the flying chain fountain," *Frontiers in Physics*, **6** (2018) 8.

[8] J. J. Bevan and J. H. B. Deane, "A rigorous mathematical treatment of the shape of a dissipative rope fountain," *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **475** (2019) 2231.

[9] E. G. Flekk?y, M. Moura, and K. J. M?l?y, "Dynamics of the fluctuating flying chain," *Frontiers in Physics*, **7** (2019) 187.

[10] N. Taberlet, J. Ferrand, and N. Plihon, "Propelled strings: Rising from friction," *Phys. Rev. Lett.*, **123** (2019) 144501.

[11] M. Denny, "A uniform explanation of all falling chain phenomena," *American Journal of Physics*, **88** (2020) 94.

[12] M. G. Calkin and R. H. March, "The dynamics of a falling chain: I," *American Journal of Physics*, **57** (1989) 154.

[13] M. G. Calkin, "The dynamics of a falling chain: II," *American Journal of Physics*, **57** (1989) 157.

[14] M. Schagerl, A. Steindl, W. Steiner, and H. Troger, "On the paradox of the free falling folded chain," *Acta Mech.*, **125** (1997) 155.

[15] J. C. Géminard and L. Vanel, "The motion of a freely falling chain tip: Force measurements," *American Journal of Physics*, **76** (2008) 541.

[16] P. Krehl, S. Engemann, and D. Schwenkel, "The puzzle of whip cracking-uncovered by a correlation of whip-tip dynamics with shock wave emission," *Shock Waves*, **8** (1998) 1.

[17] T. McMillen and A. Goriely, "Whip waves," *Physica D*, **184** (2003) 192.

[18] W. Tomaszewski, *Dynamika lin i łańcuchów*. PhD thesis, Instytut Fizyki Molekularnej, Polska Akademia Nauk, 2016.

[19] C. A. de Sousa and V. H. Rodrigues, "Mass redistribution in variable mass systems," *Eur. J. Phys.*, **25** (2004) 41.

[20] R. S. Falk and J. M. Xu, "Convergence of a second-order scheme for the nonlinear dynamical equations of elastic rods," *SIAM J. Numer. Anal.*, **32** (1995) 1185.

[21] C. S. Gatti and N. C. Perkins, "Physical and Numerical Modeling of the Dynamic Behavior of a Fly Line," *Journal of Sound and Vibration*, **255** (2001) 555.

[22] C. S. Gatti and N. C. Perkins, "Numerical analysis of flycasting mechanics," *BED-Bioeng. Conf. ASME*, **50** (2001) 277.

[23] P. Patricio, M. Adda-Bedia, and M. B. Amar, "An elastica problem : instabilities of an elastic arch," *Physica D*, **124** (1998) 285.

[24] I. Tobias, D. Swigon, and B. D. Coleman, "Elastic stability of DNA configurations. I. General theory," *Phys. Rev. E*, **61** (2000) 747.

[25] I. Tobias, D. Swigon, and B. D. Coleman, "Elastic stability of DNA configurations. II. Supercoiled plasmids with self-contact," *Phys. Rev. E*, **61** (2000) 758.

[26] A. Balaeff, L. Mahadevan, and K. Schulten, "Modeling dna loops using the theory of elasticity," *Phys. Rev. E*, **73** (2006) 031919.

[27] Z. Huang, "Modulating dna configuration by interfacial traction: an elastic rod model to characterize dna folding and unfolding.," *Journal of biological physics*, **37** (2011) 79.

[28] F.-C. Chou, J. Lipfert, and R. Das, "Blind predictions of dna and rna tweezers experiments with force and torque," *PLOS Computational Biology*, **10** (2014) e1003756.

[29] Y. Z. Wang, Q. C. Zhang, W. Wang, and Y. W. Yang, "Analysis of dna equilibrium configuration under interfacial traction," *Genetics and molecular research*, **15** (2016) gmr.15028651.

[30] J. M. Robson, "The physics of flycasting," *American Journal of Physics*, **58** (1990) 234.

[31] J. Kommers, "Notes on the Physics of Fly Casting Simulation," tech. rep., MIT Center of space research, **1995**.

[32] J. Galán, W. B. Fraser, D. J. Acheson, and A. R. Champneys, "The parametrically excited upside-down rod: an elastic jointed pendulum model," tech. rep., Bristol Center for Applied Nonlinear Mathematics, **2001**.

[33] A. R. Champneys and W. B. Fraser, "The 'Indian rope trick' for a parametrically excited flexible rod: I linearised analysis," *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A** (2004) 553.

[34] R. Salamon, H. Kamiński, and P. Fritzkowski, "Estimation of parameters of various damping models in planar motion of a pendulum," *Meccanica*, **55** (2020) 1655.

[35] H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison–Wesley, 2nd ed., 1980.

[36] M. Reeken, "Classical solutions of the chain equation. I.," *Mathematische Zeitschrift*, **165** (1979) 142.

[37] M. Reeken, "Classical solutions of the chain equations. II.," *Mathematische Zeitschrift*, **166** (1979) 67.

[38] W. I. Smirnow, *Matematyka wyższa. Tom II*. PWN, 1960.

[39] C. L. Adler, "Catenaries on the computer: A freshman physics assignment," *The Physics Teacher*, **37** (1999) 254.

[40] T. P. Dreyer and J. H. V. Vuuren, "A comparison between continuous and discrete modelling of cables with bending stiffness," *Applied Mathematical Modelling*, **23** (1999) 527.

[41] W. A. Oldfather, C. A. Ellis, and D. M. Brown, "Leonhard Euler's Elastic Curves," *Isis*, **20** (1933) 72.

[42] R. Levien, "The elastica: a mathematical history," *EECS Department, University of California, Berkeley*, **103** (2008).

[43] F. Bosi, D. Misseroni, F. D. Corso, and D. Bigoni, "Self-encapsulation, or the 'dripping' of an elastic rod," *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **471** (2015) 2179.

[44] G. R. Marple, P. K. Purohit, and S. Veerapaneni, "Equilibrium shapes of planar elastic membranes," *Phys. Rev. E*, **92** (2015) 012405.

[45] G. A. Spolek, "The mechanics of flycasting: The fly line," *American Journal of Physics*, **54** (1986) 832.

[46] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential–algebraic Problems*. Springer–Verlag, second revised ed., 1996.

[47] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical recipes in C: The art of scientific computing*. Cambridge University Press, second ed., 1992.

[48] P. Fritzkowski and H. Kamiński, "Dynamics of a rope modeled as a multi-body system with elastic joints," *Computational Mechanics*, **46** (2010) 901.

[49] W. Tomaszewski and P. Pierański, "Fizyka strzału z bicza," *Postępy Fizyki*, **55** (2004) 10.

[50] P. Fritzkowski and H. Kamiński, "Dynamics of a rope as a rigid multibody system," *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, **3** (2008) 1059.

[51] P. Fritzkowski and H. Kamiński, "Dynamics of a rope modeled as a discrete system with extensible members," *Computational Mechanics*, **44** (2009) 473.

[52] P. Fritzkowski and H. Kamiński, "A discrete model of a rope with bending stiffness or viscous damping," *Acta Mechanica Sinica*, **27** (2011) 108.

[53] E. J. Nyström, *Über die numerische Integration von Differentialgleichungen*. Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Druck der Finnischen literaturgesellschaft, 1925.

[54] E. Hairer and G. Wanner, "A theory for Nyström methods," *Numerische Mathematik*, **25** (1976) 383.

[55] A. Murua, "Runge–Kutta–Nyström methods for general second order ODEs with application to multi-body systems," *Applied Numerical Mathematics*, **28** (1998) 387.

[56] E. Hairer, S. P. Nørsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*. Springer–Verlag, second revised ed., 1993.

[57] F. Iavernaro and F. Mazzia, "Solving ordinary differential equations by generalized adams methods: properties and implementation techniques," *Appl. Num. Math.*, **28** (1998) 107.

[58] J. R. Cash and S. Considine, "An MEBDF code for stiff initial value problems," *ACM Trans. Math. Softw.*, June **18** (1992) 142.

[59] F. Mazzia and F. Iavernaro, "Test Set for Initial Value Problem Solvers," tech. rep., Dipartimento di Matematica, Universitá degli studi di Bari, Italy, **2003**. `http://www.dm.uniba.it/~testset`.

[60] A. Krupowicz, *Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1986.

[61] P. Fritzkowski and H. Kamiński, "Discrete model of a rope with scleronomic and rheonomics constraints," tech. rep., Institute of Applied Mechanics, Poznań University of Technology, **2008**.

[62] J. R. Dormand and P. J. Prince, "A family of embedded Runge-Kutta formulae," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **6** (1980) 19.

[63] P. J. Prince and J. R. Dormand, "High order embedded Runge-Kutta formulae," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **7** (1981) 67.

[64] R. W. Brankin, I. Gladwell, and L. F. Shampine, "RKSUITE: a Suite of Runge-Kutta Codes for the Initial Value problem for ODEs," Tech. Rep. 1, Math. Dept., SMU, Dallas, **1991**.

[65] F. T. Krogh, "An Adams guy does the Runge–Kutta," tech. rep., Jet Propulsion Laboratory.

[66] G. Hall, "A New Stepsize Strategy for Runge–Kutta codes," tech. rep., Department of Mathematics, University of Manchester, Manchester, England, **1994**.

[67] W. Enright, D. Higham, B. Owren, and P. Sharp, "A Survey of the Explicit Runge–Kutta Method," tech. rep., **291** 1994.

[68] C. W. Wong and K. Yasui, "Falling chains," **74** (2006) 490.

[69] C. A. de Sousa, P. M. Gordo, and P. Costa, "Falling chains as variable-mass systems: theoretical model and experimental analysis," *European Journal of Physics*, **33** (2012) 1007.

[70] G. Hamel, *Theoretische Mechanik*. Springer-Verlag, second revised ed., **1949**.

[71] W. Tomaszewski and P. Pierański, "Dynamics of ropes and chains. I. The fall of the folded chain," *New J. Phys.*, **7** (2005) 45.

[72] C. E. Mungan, "Newtonian analysis of a folded chain drop," *The Physics Teacher*, **56** (2018) 298.

[73] W. Tomaszewski, P. Pierański, and J. C. Geminard, "The motion of a freely falling chain tip," *Am. J. Phys.*, **74** (2006) 776.

[74] C. W. Wong, S. H. Youn, and K. Yasui, "Two falling-chain demonstrations based on Einstein's equivalence principle," **2006**.

[75] K. Jegdic and V. Jovanovic, "Dynamic Behavior of Moving Chains," *International Journal of Engineering and Mathematical Modelling*, **3** (2016) 1.

[76] G. Klein, I. Shiroky, and Y. Ben-Shushan, "Cable dynamics under general excitation fields," *Israel Air Force*, 2016.

[77] P. Pierański and W. Tomaszewski, "Fizyka strzelającego bicza," *Foton*, **85** (2004) 4.

[78] O. R. Lummer, "Über die Theorie des Knalls [cytujemy za P. Krehlem]," *Jahrebericht Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur*, **83** (1905) 2.

[79] S. C. Preston, "The motion of whips and chains," *Journal of Differential Equations*, **251** (2011) 504.

[80] C. W. Wong, S. H. Youn, and K. Yasui, "The falling chain of Hopkins, Tait, Steele and Cayley," *European Journal of Physics*, **28** (2007) 385.

[81] C. A. de Sousa, P. M. Gordo, and P. Costa, "Falling chains as variable-mass systems: theoretical model and experimental analysis," *European Journal of Physics*, **33** (2012) 1007.

[82] E. G. Virga, "Chain paradoxes," *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **471** (2014) 2173.

[83] B. W. Nuryadin, "The falling chain analysis using kitchen scales," *Physics Education*, **55** (2020) 3.

[84] J. Pantaleone, "Understanding and enhancing the impact-induced tension of a falling chain," *American Journal of Physics*, **89** (2021) 267.

[85] J. P. Koulakis, C. D. Mitescu, F. Brochard-Wyart, P. G. de Gennes, and E. Guyon, "The viscous catenary revisited: experiments and theory," **609** (2008) 87.

[86] H. Zhao, S. Zhen, and Y. H. Chen, "Dynamic modeling and simulation of multi-body systems using the Udwadia-Kalaba theory," *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, **26** (2013) 839.

[87] C. Treviño, S. Peralta, A. Torres, and A. Medina, "Super free fall of an inviscid liquid through interconnected vertical pipes," *EPL (Europhysics Letters)*, **112** (2015) 14002.

[88] C. V. da Silva Sarmento, R. Ribeiro, and M. Vieira, "Análise teórica do problema de uma corrente dobrada em queda livree: apliciações a estaca torpedo," *Proceedings of the XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2013.

[89] G. M. Paredes and F. Taveira-Pinto, "An experimental technique to track mooring cables in small scale models using image processing," *Ocean Engineering*, **111** (2016) 439.

[90] l. Rodríguez Luis, J. A. Armesto, R. Guanche, C. Barrera, and C. Vidal, "Simulation of marine towing cable dynamics using a finite elements method," *Journal of Marine Science and Engineering*, **8** (2020) 140.

[91] Y. Obikane, *Three-Dim-Lagrange Dynamics on Arresting Gear for UAV*. Engineers Australia, (2019) 912-922.

[92] K. A. Vogel, *Dynamics and Control of Tethered Satellite Formations for the Purpose of Space-Based Remote Sensing*. PhD thesis, Department of Aeronautical and Astronautical Engineering, Air Force Institute of Technology, Ohio, USA, 2006.

[93] V. S. Aslanov, A. S. Ledkov, A. K. Misra, and A. D. Guerman, "Dynamics of space elevator after tether rupture," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **36** (2013) 986.

[94] M. Fedi Casas, *Dynamics and control of tethered satellite formations in low-Earth orbits*. PhD thesis, Universitat Polit?cnica de Catalunya. Departament de Matem?tica Aplicada I, 2015.

[95] N. Keshtkar, M. S. Rivo, A. Poznyak, and S. Keshtkar, "Modeling and simulation of flexible tethered satellite system," in *2018 15th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, (2018) 8533913.

[96] P. T. Brun, B. Audoly, A. Goriely, A. Dominic, and V. Dominic, "The surprising dynamics of a chain on a pulley: Lift-off and snapping," *arXiv preprint arXiv:1605.03714*, 2016.